MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

4. JANUÁR ára: 88,- Ft II. évf. / 1. szám

TARTALOM

EGY MATEMATIKA TANTÁRGYFEJLESZTŐ PROGRAMRÓL
Dr. Katz Sándor
gimnáziumi tanár, Bonyhád

A bonyhádi Petőfi Sándor Gimnáziumban évtizedek óta jelentős hagyományai és számottevő eredményei vannak a matematikai tehetséggondozásnak. Az elmúlt néhány évben egy olyan, tartalmában és szervezeti kereteiben egyaránt korszerű programot, tananyagot dolgoztunk ki, ... *(3. oldal)*

STATISZTIKA A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAOKTATÁSBAN
Vancsó Ödön
tanársegéd, ELTE, Budapest

Szeretnék erről a témáról egy hosszabb cikksorozatot írni, mivel nagyon fontosnak tartom, hogy az iskolai matematika oktatásban jóval nagyobb szerepet kapjon a statisztika mint eddig. Az egyik főforrásnak kellene lennie a valószínűségszámítás tanítása szempontjából: is, hiszen ... *(12. oldal)*

AZ 1991/92. TANÉVI BELGIUMI (FLANDRIAI) MATEMATIKAI OLIMPIA ELSŐ FORDULÓJÁNAK FELADATAI
Urbán Eszter
egyetemi hallgató

FELADATROVAT- TANÁROKNAK

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

Az 1993-as évben harmadszor került megrendezésre az egyre népszerűbb Zrínyi Ilona Matematikaverseny az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói számára. Növekvő népszerűségét jelzi, hogy legutóbb már több mint 35 000 tanuló vett részt a versenyen az ország minden részéből. *(31. oldal)*

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 440 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos felvilágosítás:Tóth Mónika
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

EGY MATEMATIKA TANTÁRGYFEJLESZTŐ PROGRAMRÓL
Dr. Katz Sándor
gimnáziumi tanár, Bonyhád

STATISZTIKA A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAOKTATÁSBAN
Vancsó Ödön
tanársegéd, ELTE, Budapest

AZ 1991/92. TANÉVI BELGIUMI (FLANDRIAI) MATEMATIKAI OLIMPIA ELSŐ FORDULÓJÁNAK FELADATAI
Urbán Eszter
egyetemi hallgató

FELADATROVAT- TANÁROKNAK

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

HELYREIGAZÍTÁS

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Dr. Katz Sándor

Egy matematika tantárgyfejlesztő programról

A bonyhádi Petőfi Sándor Gimnáziumban évtizedek óta jelentős hagyományai és számottevő eredményei vannak a matematikai tehetséggondozásnak. Az elmúlt néhány évben egy olyan, tartalmában és szervezeti kereteiben egyaránt korszerű programot, tananyagot dolgoztunk ki, amely a korábbinál is eredményesebb matematikatanítást tesz lehetővé. Tapasztalataink szerint egy ilyen jellegű, a fakultációs és a speciális osztályok közötti követelményeket célul tűző kísérlet iránt országszerte nagy érdeklődés mutatkozik. Ezen program szerint tanuló osztályainkat természettudományos osztályoknak neveztük.

A természettudományos osztályok kialakulása

A hetvenes években fizika szakosított tantervű osztályok biztosítottak megfelelő kereteket a színvonalas matematika-fizika tanításhoz. A szakosított tantervű osztályok megszüntetése után bevezetett fakultációs rendszerben a tagozatos osztályok első és második osztályos lehetőségeit szakkörökkel csak megközelíteni lehetett. Bár ezután a harmadik és negyedik osztályos fakultáción is meg tudtuk tanítani a felvételi anyagát; a matematika és fizika fakultációsok több mint 80 %-át továbbra is felvették, de egyrészt kevesebben választották a fakultációt, mint korábban a szakosított tantervű osztályokat, másrészt nem sikerült elvárásainknak megfelelően kialakítani azt a szemléletmódot, tantárgyszeretetet, nagyobb összefüggésekben való gondolkodást, amely a szakosított tantervű osztályokat jellemezte.

Úgy éreztük, hogy a tagozatos osztályok első két évének intenzív munkára nevelő, a matematikai és természettudományos gondolkodást kialakító, ezeket megszerettető hatását valamilyen módon vissza kell hoznunk. Az általános iskolák és a szülők részéről is határozott igény mutatkozott egy speciálisan képző, a matematikát és a természettudományokat magasabb szinten tanuló osztály vagy csoport indítására.

Felmerült annak a lehetősége, hogy matematika speciális osztályt indítsunk. Ettől azért álltunk el, mert ezekben az osztályokban csak egy tantárgyat tanulnak magasabb, nagyon magas óraszámban a tanulók, így más kapcsolódó tárgyakat pl. fizikát, kémiát, vagy a közgazdasági pályákra készülők a történelmet csak alaptanterv szerint tanulhatnak. A matematika speciális osztályok tantervét a kiemelkedően tehetséges, a matematika iránt már általános iskolás korban elkötelezett tanulókhoz méretezték. Még távolabbi környékünkön is csak kevés olyan tanuló van, akinek kedvező lett volna ez a tanterv. Kisebb iskolákban a speciális osztályok indítása a többi tantárgy fakultációs lehetőségeit is lényegesen szűkíti.

Mivel az első két osztályra a speciálisnál alacsonyabb óraszámú emelt szintű matematika tanterv, tananyag nem volt kidolgozva, így magunk terveztük meg, állítottuk össze az 1986-ban indított emelt szintű vagy ,,előrehozott fakultációjú'' matematika csoport tananyagát. (A csoport indítását egy évvel előbb 8. osztályosok számára szervezett matematika szakkörrel készítettük elő.) Ebben a csoportban az első két évben heti két órával magasabb óraszámban tanulták a tanulók a matematikát, harmadik osztálytól pedig a fakultációs rendszerhez csatlakoztak. Ezekben a csoportokban a matematika iránti érdeklődés lényegesen jobb volt, mint korábban azoknál, akik első két évben csak alaptanterv szerint tanultak, de a létszámokban lényeges javulást nem sikerült

elérnünk. Ennek okát egyrészt abban láttuk, hogy egyetlen tantárgy iránt kevesebb tanuló merte elkötelezni magát másrészt kezdeményezésünket is csak szűk körben ismerték.

Úgy gondoltuk, hogy a személyi és tárgyi feltételek jórészt adottak kísérletünknek a többi természettudományos tárgyra való kiterjesztéséhez. A fentebb vázolt elvárások, a haladó csoport már meglévő tapasztalatai arra ösztönöztek bennünket, hogy olyan új rendszert dolgozzunk ki, amely a matematika. és a természettudományok iránt az átlagosnál érdeklődőbb, tehetségesebb tanulók igényeinek és érdekeinek a legjobban megfelel, amely egyesíti magában a tagozatos osztályok és a fakultációs rendszer előnyeit.

Az volt a célunk,hogy természettudományos osztályunk rendelkezzék a speciális osztályok azon előnyével, hogy jórészt azonos érdeklődésű, tehetséges, az intenzív munkát már első osztályban vállaló tanulókból áll. Egészséges versenyszellem, olyan értékrend alakul ki, amelyben a tudás, a munka a meghatározó.

Emellett meg akartuk őrizni a fakultációs rendszernek azt a rugalmasságát, hogy ha a tanuló érdeklődése változik, ha rájön, hogy részben új, vagy teljesen más terület lenne a számára kedvezőbb, akkor irányt változtathat anélkül, hogy ez a megszokott közösség elhagyásával járna, törést, kudarcot okozna.

Ezeket a terveket a következő rendszerben láttuk megvalósíthatónak: A természettudományos osztályba járó tanulók első osztályban matematikát heti kettő, fizikát és kémiát heti egy-egy órával magasabb óraszámban tanulnak. Ez mindegyik tárgyból 50 %-os növekedés az alaptantervi óraszámhoz képest. Második osztályban a matematika, fizika, kémia és biológia tárgyak közül választhatnak kettőt, amelyből heti 2-2 órával magasabb az óraszám. Ez a matematikánál 67 %, a többi tárgynál 100 %-os növekedés. Erre az óraszám-növekedésre úgy teremtünk lehetőséget, hogy az úgynevezett „B" variánsú tanterv szerint a technikát 3. és 4. osztályban tanítjuk. Ez heti két órát jelent, a másik kettő pedig heti óraszám-növekedést jelent az ebbe az osztályba járó tanulóknak.

Harmadik osztálytól a fakultációs rendszer szerint folytatódik a tanítás. Azaz harmadiktól vagy a második osztályban választott két tárgyat viszi tovább a tanuló, (a többség ezt teszi), vagy csak az egyiket, és az iskola fakultációs ajánlatából választ mellé érdeklődési körének, pályaválasztási szándékának megfelelő másikat. Például aki közgazdasági pályára készül, az megtartja az első két évben tanult matematikát és történelmet választ mellé. Sőt arra is van lehetőség, hogy ha érdeklődési köre megváltozott, teljesen új fakultatív tárgyakat válasszon. Ezt, az első két évben jó szakmai alapokat biztosító, intenzív munkát követelő, de nagyfokú rugalmassággal bíró rendszert láttuk alkalmasnak arra, hogy pedagógiai és szakmai céljainkat a tanulók érdekeinek leginkább megfelelően tudjuk megvalósítani.

A természettudományos osztályok tantárgy-pedagógiai céljai, tananyaga

Mint fentebb már említettük, a természettudományos osztályok kialakításának nem az volt az elsődleges célja, hogy magasabb óraszámokat biztosítsunk a felvételi anyag elsajátításához, hanem az, hogy a tanulók szemléletét, gondolkodásmódját fejlesszük. Az volt a célunk, hogy a tanulóknak a választott tárgyak ne csak megtanulandó tételek, feladatok, tesztek halmazát jelentsék, hanem lássák a matematika, fizika, kémia, biológia helyét, szerepét az emberi gondolkodásban, kultúrában; lássák azok egymáshoz és a műveltség más területeihez való kapcsolódását. Az emberi kultúra egészéhez való kapcsolódás mellett legyen alkalmuk felismerni a tantárgyakra jellemző gondolkodás specifikus jegyeit.

Ezek a célok vezettek bennünket a természettudományos osztályokban a tananyag és az alkalmazott módszerek kiválasztásánál. Így a fentebb említett számú többletórát nem arra akartuk fordítani, hogy a speciális osztályokhoz hasonló mértékben bővítsük a középiskolai anyagot, hanem csak olyan új ismereteket építettünk be, amelyek a szemléletfejlesztéshez, az

összefüggések könnyebb felismeréséhez, a tantárgy megszerettetéséhez szükségesek. Mindez nem azt jelenti, hogy az eredményesség növelése másodrangú cél lenne. Sőt így maradt időnk hatékonyabb, de időigényes módszerek (pl. önálló felfedeztetés, differenciált feladatok) alkalmazására, egy-egy felmerülő probléma részletesebb elemzésére. A matematika haladó csoportok tapasztalatai azt mutatták, hogy a fenti célú, mérsékelt tananyag növekedés az elért szemléletfejlődéssel és a megnövekedett gyakorlási időkkel jelentős teljesítményjavulást eredményez.

Mit jelentettek a fenti célok konkrétan a matematika anyagának kialakításánál? Minden témakörben fontosnak tartottuk, hogy annak matematikatörténeti vonatkozásait is feltárjuk. Így egy önmagában kevésbé vonzó témakör is érdekesebb, könnyebben megjegyezhető lehet. Így természetessé válhat a tanulók számára, hogy a matematika az emberi kultúra szerves része. (Persze erre nem csak az emelt szintű tananyagban érdemes figyelni. De itt mégis csak több idő, lehetőség van történeti szempontból érdekes részek beiktatására.)

Ilyen téma például a magasabbfokú egyenletek problémaköre, ilyenek a görögök által felvetett geometriai problémák: a körosztás, a kockakettőzés, a szögharmadolás, a kör négyszögesítésének kérdése. Kiemelkedő szerepe van ebből a szempontból a szemléletnek, amelynek egyes kérdései (pl. tökéletes számok) végigkísérik a matematika történetet a korai görög számmisztikától napjaink számítógépes eredményeiig.

A matematika tanításában egyre nagyobb szerep jut a függvényeknek, a függvényszerű gondolkodásnak. Tapasztalatunk szerint ebben jelentős előrelépés érhető el, ha a korábbinál általánosabb halmazelméleti függvényfogalmat is kialakítjuk. Így valóban a matematikai gondolkodás központi fogalmává válhat a függvény, és a függvénytan igen hatékony módszereit egyre szélesebb területen alkalmazhatjuk.

Kulcsszerepet szántunk a szélsőértékproblémáknak, ezeket a természettudományos osztályban sok fizikai, gyakorlati feladatra alkalmaztuk. Néhány példával rámutattunk arra, hogy a matematika a művészetektől sem áll távol (arányok, közepek, aranymetszés).

Mindezeken túl még egy jelentős feladat hárult a matematikára a természettudományos osztályainkban. Az elmúlt években kidolgoztunk egy módszert az alapvető számítástechnikai ismeretek négy tantárgyban (matematika, technika, fizika, kémia) integrált tanítására. Az új számítástechnikai ismeretek tárgyalása matematika és technikaórákon történt, a fizika és a kémia az alkalmazásokban kapott szerepet. Most a technika harmadik és negyedik osztályba történő áthelyezésével sem akartunk lemondani a számítástechnika tanításáról, ezért a legfontosabb ismereteket most a matematika tananyagba építve tanítjuk meg.

A felsorolt elvek, célok, szempontok megvalósításához a következő témakörökkel egészítettük ki a hagyományos tananyagot:

I. osztály

1. Számelmélet

Számolás maradékokkal
Prímszámokra vonatkozó tételek, Fermat-féle prímek, Mersenne-féle prímek, tökéletes számok, nevezetes sejtések
Néhány diophantoszi egyenlet

2. Függvények

A halmazelméleti függvényfogalom
Néhány nem elemi függvény
Adott tulajdonságú függvények konstruálása

3. Számítástechnika

Alapvető parancsok, utasítások, függvények
Sorozatok, táblázatok képzése
Egyszerűbb elágazásos programok
Számelméleti alkalmazások

II. osztály

1. *Nevezetes egyenlőtlenségek. Nevezetes közepek*
   Szélsőértékfeladatok megoldása elemi módszerekkel

2. *Aranymetszés, Fibonacci sorozat, szabályos öt- és tízszög szerkesztése*
   Szabályos sokszögek szerkeszthetősége, kockakettőzés, (szögharmadolás, a kör négyszögesítése)
   Néhány nevezetes geometriai tétel (Euler-egyenes, Feurbach-kör, Ceva tétel)

3. *Magasabb fokú egyenletek*
   Történeti áttekintés (Tartaglia, Cardano, Galois)
   Helyettesítéssel és más módszerekkel megoldható magasabb fokú egyenletek
   Magasabb fokú egyenletek racionális gyökei

4. *Számítástechnika*
   Grafikus üzemmód, pontok, vonalak ábrázolása
   Függvények grafikonja
   Egyenletek közelítő megoldása

Harmadik és negyedik osztályban nincs több matematikaóra a természettudományos osztályokban, mint a más iskolák fakultációs csoportjaiban, így a tananyagot sem bővítettük számottevő mértékben. A fentebb felsorolt témakörök egyes részei nemcsak második, hanem harmadik és negyedik osztályban is szerepelnek (pl. Egyenlőtlenségek, szélsőértékfeladatok, szerkeszthetőségi problémák.) Szabadon választott témakörként a komplex számokkal foglalkozunk, elsősorban abból a szempontból, hogy ezek mennyiben segíthetik a hagyományos anyag tárgyalását. Tehát nem a komplex számokkal való számolás gyakorlása a cél, hanem az, hogy új szempontból láttathatjuk a polinomok, egyenletek témakörét, ezzel is a matematikai szemléletmódot kívánjuk fejleszteni.

A harmadik és negyedik osztályban a többletet elsősorban az jelenti, hogy az első két évben kialakult magasabb szintű felkészültség és érdeklődés változatosabb, nehezebb feladatanyag tárgyalását teszi lehetővé. Fejlesztőmunkánk itt elsősorban az ehhez szükséges színvonalas feladatokat tartalmazó feladatbank kialakítására irányul.

A természettudományos osztályok eddigi tapasztalatai

Bár az első természettudományos osztályunk csak az idén érettségizett,már az eddigi tapasztalatok alapján is elmondhatjuk, hogy ezek az osztályok teljes mértékben igazolták várakozásunkat. Minden szempontból felveszik a versenyt korábbi szakosított tantervű osztályainkkal, sőt több szempontból (pl. a Középiskolai Matematikai Lapokban rendszeresen dolgozók számában) felülmúlják eddigi legsikeresebb osztályainkat is.

Az Arany Dániel Matematikaversenyen ezen osztályok tanulói eddig két első, két második, egy harmadik díjat és két dicséretet kaptak.

Amióta természettudományos osztályunk van, azóta mindig van tanulónk a Mikola Fizika Tehetségkutató Verseny országos döntőjében. Eddig két tanulónk jutott az első tíz közé.

A természettudományos osztályok felsőbb osztályaiba lépett tanulóink is produkáltak már néhány kiemelkedő eredményt. Az elmúlt tanévben 5 tanulónk jutott be a matematika OKTV döntőjébe, közülük egy 4. helyezett lett, ketten miniszteri dicséretet kaptak. Egy tanulónk részt vett (a Fazekas Gimnázium három tanulójával együt) a magyar-izraeli ,,válogatott'' versenyen, és ott holtversenyben első lett.

Fizikából az Eötvös versenyen egy első díj, OKTV-n egy második helyezés, Ki Miben Tudóson egy negyedik díj, a nemzetközi diákolimpián egy aranyérem jelzi, hogy természettudományos osztályainkban színvonalas munka folyik.

Azt, hogy az eredmények nemcsak egy-két kiemelkedő képességű tanulónak köszönhetők, jelzi, hogy természettudományos osztályainkból a Középiskolai Matematikai Lapoknak mate-

matikából és fizikából is minden évben 35-40 rendszeres megoldója volt. Az iskolák közötti 1990-91. évi pontversenyben matematikából és fizikából is iskolánk lett az országban a második. Az egyéni versenyeken elért eredmények mellett erre ugyanolyan büszkék vagyunk, mert ez sok tanuló folyamatosan színvonalas munkáját jelzi.

Nem véletlen, hogy éppen matematikából és fizikából érnek el ilyen szép eredményeket tanulóink. Egy kísérlet sikeréhez ugyanis nem elegendő egy óraterv összeállítása, és néhány kiegészítő tananyag kiválasztása. Ez csak a kereteket adja. A magasabb szintű szakmai tartalom kialakításához hosszú évek fáradságos tantárgyfejlesztő munkája szükséges. A korábbi fizika szakosított osztályainkban már kialakult, a színvonalas tanári és tanulói munka hagyománya éppen ezért tartottuk fontosnak az ismét megfelelő kereteket teremtő természettudományos osztályok kialakítását. A matematika tananyagát pedig már jórészt a korábbi matematika haladó csoportokban kialakítottuk. Az eddig érettségizett, osztályokban szerzett tapasztalatok alapján módosítottuk ott, ahol szükségesnek látszott. Tehát a tananyag kiválasztása már hét év tapasztalatain nyugszik. Emellett, az eredményességhez nagyban hozzájárult az is, hogy ehhez a tananyaghoz egy több száz feladatból álló feladatbankot hoztunk létre. Évek óta rendszeresen fordítunk külföldi felvételi és versenyfeladatokat, így feladatanyagunk jelentős része magyarul még meg nem jelent feladatokból áll. Ezek egy részét azokhoz az anyagrészekhez használjuk, amelyekkel kiegészítettük a hagyományos gimnáziumi anyagot, más része pedig a mindenütt tanított anyagrészekhez biztosít változatosabb, színvonalasabb gyakorlási lehetőséget, a harmadik csoport pedig a versenyekre való felkészülést segíti.

A feladatanyagot folyamatosan számítógépre visszük, (eddig kb 600 feladatot), így a programunkban résztvevő minden tanár annyi feladatot és annyi példányban tud kinyomtatni, ahányra az órai vagy otthoni gyakoroltatáshoz, vagy dolgozatíráshoz szükség van. A számítógépes feladatbanknak az is nagy előnye a nyomtatott feladatgyűjteményekkel szemben, hogy folyamatosan bővíthető, az egyéni ízlésnek megfelelően módosítható.

Úgy láttuk, hogy a feladatanyag legjobban használható formája az, ha rövidebb feladatsorokat állítunk össze. Néhány kidolgozott mintapéldához 10-12 gyakorlófeladatot adunk. Mivel a mintapéldák segítséget adnak a többi feladat megoldásához, ezeket a feladatsorokat a tanulók önállóan is tudják használni.

Matematika tantárgyi fejlesztőmunkánk tehát két fő részből áll: egyrészt a természettudományos osztályok matematika elméleti anyagának összeállításából, másrészt a feladatanyag kidolgozásából. Az elméleti anyag összeállítása nemcsak a megfelelő anyagrészek kiválasztásából, a többi anyaggal való összehangolásából áll, hanem összegyűjtjük azokat a forrásokat kiegészítő tankönyvek, módszertani könyvek megfelelő fejezeteit, folyóiratok cikkeit, külföldi folyóiratokból vett fordításokat, apróbb módszertani ötleteket, amelyek ezen anyag tanítását segíthetik.

Úgy gondoljuk, kísérletünkkel jó úton járunk. Olyan területen dolgoztunk ki valami újat, jól használhatót, ahol erre széleskörben igény van. Programunk matematikai része több éves tapasztalat alapján jól bevált. Eddigi tapasztalatainkkal szívesen állunk az érdeklődő iskolák rendelkezésére.

A továbbiakban két feladatsort ismertetünk a természettudományos osztályok számára összeállított feladatanyagból. Az első egy kiegészítő témakörhöz, a magasabb fokú egyenletek helyettesítéssel történő megoldásához mutat be néhány módszert, a második pedig egy szélsőértékfeladat megoldási módszert ismertet; és mindkettő gyakorló feladatokat tartalmaz a bemutatott módszerek elsajátításához.

I. melléklet

Helyettesítéssel megoldható magasabb fokú egyenletek

I. Mintapéldák

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$(x^2 + 6x)^2 - 63 = (x + 3)^2$$

Megoldás:

Helyettesítsünk $y = (x + 3)^2$-t! Ekkor $x^2 + 6x = y - 9$, így az egyenlet:

$$(y - 9)^2 - 63 = y$$

$$y^2 - 19y + 18 = 0$$

Ebből $y = 1$, vagy $y = 18$. Visszahelyettesítve:

$x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = -3 + \sqrt{18}$,

$x_4 = -3 - \sqrt{18}$.

Minden lépés ekvivalens átalakítás volt, ezért a kapott gyökök jók.

Az $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ egyenletet szimmetrikusnak nevezzük akkor, ha $a_{n-k} = a_k$ a $k = 0, 1, 2, \ldots [n/2]$ számok mindegyikére teljesül. ($a_n \neq 0$) Ha $a_{n-k} = -a_k$, akkor antiszimmetrikusnak nevezzük.

2. Oldjuk meg az $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ szimmetrikus egyenletet!

Megoldás:

Mivel $x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, osszuk mindkét oldalt x^2-tel!

$$x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Jelöljük $x + \frac{1}{x}$-et y-nal!

Ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, így

$$y^2 - 2 - 3y + 4 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Ebből $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

Mivel minden nullától különböző valós x-re $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$, ezért y_1-hez nem lesz megfelelő x, y_2-höz pedig $x = 1$ tartozik, ami kielégíti az egyenletet.

Megjegyzés:

Ha az $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ egyenletben $d = \lambda b$ és $e = \lambda^2 a$, akkor $y = x + \frac{\lambda}{x}$ helyettesítéssel a fentiek szerint megoldható.

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x - 1)(x - 3)(x - 6)(x - 8) = 144$$

Első megoldás:

Vegyük észre, hogy $1 + 8 = 3 + 6$, ezért az első tényezőt a negyedikkel, a másodikat a harmadikkal szorozzuk!

$$(x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 18) = 144$$

Helyettesítsünk $y = x^2 - 9x + 8$-at

$$y(y + 10) = 144$$

$$y^2 + 10y - 144 = 0$$

Ebből $y_1 = 8$ és $y_2 = -18$, így $x^2 - 9x + 8 = 8$, ebből $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, mindkettő kielégíti az egyenletet, vagy $x^2 - 9x + 8 = -18$. Ennek nincs valós gyöke.

Második megoldás:

Most azt használjuk fel, hogy 1 és 8, valamint 3 és 6 párok a számegyenesen 4,5-re szimmetrikusan helyezkednek el, ezért most $z = x - 4{,}5$ helyettesítést alkalmazzunk!

$$(z + 3{,}5)(z + 1{,}5)(z - 1{,}5)(z + 3{,}5) = 144$$

$$(z^2 - 12{,}25)(z^2 - 2{,}25) = 144$$

$$z^4 - 14{,}5z^2 - 116{,}4375 = 0$$

Ebből $z^2 = -5{,}75$, ez nem lehet, vagy $z^2 = 20{,}25$, ebből $z = 4{,}5$, $x = 0$, vagy $z = -4{,}5$, $x = 9$.

4. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 82$$

Megoldás:

Helyettesítsünk $y = x + 4$-et!

$$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 82$$

A hatványozást elvégezve a páratlan fokszámú tagok kiesnek.

$$2y^4 + 12y^2 + 2 = 82$$

$$y^4 + 6y^2 - 40 = 0$$

Ebből: $y^2 = -10$, ennek nincs valós gyöke, vagy $y^2 = 4$, $y = \pm 2$, visszahelyettesítve: $x = -2$ vagy $x = -6$. Minden lépés ekvivalens átalakítás volt, ezért a kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

5. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) + 24 = 0$$

Megoldás:

Alakítsuk szorzattá mindkét tényezőt!

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x + 4) + 24 = 0,$$

Másként csoportosítva:

$$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 = 0$$

Helyettesítsünk $y = x^2 + x - 2$-t!

$$y(y - 10) + 24 = 0.$$

$$y^2 - 10y + 24 = 0.$$

Ebből: $y = 4$ vagy $y = 6$. Visszahelyettesítve az $x = 2$, $x = -3$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$. gyököket kapjuk, mindegyik megoldása az egyenletnek.

6. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$(x^2 - 4)^2 - 8(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) + \\ + 12(x^2 - 9)^2 = 0.$$

Megoldás:

$$(x^2 - 4)^2 - 8(x - 2)(x - 3)(x + 2)(x + 3) + \\ + 12(x^2 - 9)^2 = 0.$$

Mivel $x = \pm 3$ nem megoldás, ezért oszthatunk $(x^2 - 9)^2$-tel:

$$\frac{(x^2 - 4)^2}{(x^2 - 9)^2} - 8 \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} + 12 = 0;$$

$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$ helyettesítéssel:

$$y^2 - 8y + 12 = 0.$$

Ebből $y = 2$ vagy $y = 6$.

Visszahelyettesítve: $x = \pm\sqrt{14}$ vagy $x = \pm\sqrt{10}$.

7. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$$

Megoldás:

Mivel $x = 0$ nem megoldás, a baloldali törteket egyszerűsítsük x-szel!

$$\frac{4}{x + 3/x + 1} + \frac{5}{x + 3/x - 5} = -\frac{3}{2}$$

$y = x + 3/x + 1$-et helyettesítve:

$$\frac{4}{y} + \frac{5}{y - 6} = -\frac{3}{2}$$

Ebből: $y = \pm 4$. Ezeket visszahelyettesítve: $x + \frac{3}{x} = 3$ vagy $x + \frac{3}{x} = -5$. Az elsőnek nincs valós gyöke a másodikból $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Mindkét gyök kielégíti az egyenletet.

II. Feladatok

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

1. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 20 = 0$

2. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1) = 55$

3. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 7$

4. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 120$

5. $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19$

6. $(1 - x)(2 - x)(x + 3)(x + 4) = 84$

7. $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$

8. $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 = 0$

9. $(x - 1)^4 + (x + 5)^4 = 162$

10. $(x + 3)^5 - (x + 1)^5 + 242$

11. $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

12. $(x + 1)(x + 2)(x + 5)(x + 10) = -4x^2$

13. $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$

14. $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

15. $x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$

16. $3x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$

17. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 6x + 4 = 0$

18. $x^6 - x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 16x + 64 = 0$

19. Igazoljuk, hogy ha egy szimmetrikus egyenletnek egy x valós szám gyöke, akkor $\frac{1}{x}$ is gyöke! (Ezért a szimmetrikus egyenletet reciprok egyenletnek is nevezik.)

20. $(x^2 - 1)^2 - 3(x^3 - 1) - 10(x^2 + x + 1)^2 = 0$

21. $(x - 2)^2(x + 1)^2 - (x - 2)(x^2 - 1) - 2(x - 1)^2 = 0$

22. $\frac{3}{x^2 - 2x} + (x - 1)^2 = 5$

23. $\frac{6}{2x^2 - 6x + 1} + 9x = 3x^2 + 4$

24. $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$

25. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$

26. $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$

27. $\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = \frac{13}{5}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{x}\right)$

28. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 6$

29. $\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 = 30$

II. melléklet

Szélsőérték-feladatok megoldása paraméteres másodfokú egyenletek segítségével

Mintapéldák:

I. Határozzuk meg az $\frac{x+1}{x^2+1}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x \in \mathbb{R}$!

Megoldás:

A megoldáshoz használjuk fel a következő nyilvánvaló állítást:

Egy f kifejezés értékkészlete mindazon p valós számok halmaza, amelyekre az f(x) = p egyenletnek van megoldása.

Ezáltal a szélsőérték keresését a jobban ismert egyenletek témakörre vezetjük vissza.

$\frac{x+1}{x^2+1} = p$ egyenlet ekvivalens a $px^2 - x + p - 1 = 0$ másodfokú egyenlettel. Ennek akkor van valós gyöke, ha a diszkriminánsa nem negatív:

$$1 - 4p(p-1) \geqq 0,$$

$$4p^2 - 4p - 1 \leqq 0.$$

Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqq p \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát az $\frac{x+1}{x^2+1}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értéke $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

II. Egy üvegpohár belső keresztmetszete 25 cm^2, tömege 200 g, súlypontja a pohár belsejének legalsó pontja felett 4 cm magasságban helyezkedik el. Milyen magasan lesz a súlypont, ha h magasságú vízoszlopot öntünk a pohárba? Milyen h esetén lesz a súlypont a legalacsonyabban?

Megoldás:

Helyezzük a poharat a koordináta-rendszerbe úgy, hogy a pohár belsejének legalsó pontja az x tengelyen legyen.

Ha a pohár tömege m_1, súlypontjának második koordinátája y_1, a beöntött víz tömege m_2, súlypontjának magassága y_2, akkor a pohár és a víz együttes súlypontjának magassága $y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$.

A feladat adatait behelyettesítve:

$$y = \frac{200 \cdot 4 + 25h \cdot \frac{h}{2}}{200 + 25h} = \frac{64 + h^2}{16 + 2h}$$

Ennek keressük a maximumát, ha $h > 0$. Vizsgáljuk, hogy az $y = \frac{64+h^2}{16+2h}$ egyenletnek milyen y esetén van megoldása, ha a h ismeretlen és az y paraméter is csak pozitív lehet.

Ekkor az egyenlet ekvivalens a $h^2 - 2yh + 64 - 16y = 0$ egyenlettel. Ennek akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nem negatív:

$$4y^2 - 4(64 - 16y) \geq 0,$$

$$y^2 + 16y - 64 \geq 0,$$

ez akkor teljesül, ha

$$y \leq -8 - 8\sqrt{2} \text{ vagy } y \geq -8 + 8\sqrt{2}.$$

Mivel $y > 0$, ezért a pohár és a víz együttes súlypontja nem lehet $-8 + 8\sqrt{2} \approx 3{,}31$ cm-nél közelebb a pohár aljához. Ha a súlypont a legalacsonyabban van, azaz ha $y = -8 + 8\sqrt{2} \approx \approx 3{,}31$, akkor a diszkrimináns 0, ekkor a megoldóképletből látható, hogy $y = h$, azaz a víz magassága is $h = 3{,}31$ cm.

Feladatok:

Határozzuk meg a következő kifejezések értékkészletét!

1. $\frac{2x}{1+x^2}$.

2. $\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$.

3. $\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}$.

4. $\frac{x^2}{1-x^2}$.

5. Az $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$ egyenletű hiperbola mely pontjában lesz a koordináták összege minimális?

6. Melyik az a pozitív szám, amellyel 6-ot megszorozva, 24-et elosztva, majd a két eredményt összeadva a lehető legkisebb összeget kapjuk?

7. Az $ABCD$ négyzet AB oldalegyenesén keressük meg azt a P pontot, amelyre a $PD : PC$ arány a legnagyobb!

8. Egy egykarú emelővel egy 1000 N súlyú testet akarunk felemelni, amely az alátámasztási ponttól 1 m távolságban van. Az emelőrúd súlya méterenként 80 N. Milyen hosszú rudat válasszunk, hogy a lehető legkisebb erővel tudjuk megemelni az 1000 N súlyú testet?

9. A hidrogénatomban egy elektron energiájának az elektronpálya sugarától való függését az $E(r) = \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}$ összefüggés írja le, ahol a és b konstansok. Mekkora sugár esetén lesz az energiának minimuma?

10. Egy E elektromotoros erejű R_b belső ellenállású telepre mekkora R külső ellenállást kapcsoljunk, ha azt akarjuk, hogy felvett teljesítménye maximális legyen?

Vancsó Ödön

Statisztika a középiskolai matematikaoktatásban

Szeretnék erről a témáról egy hosszabb cikksorozatot írni, mivel nagyon fontosnak tartom, hogy az iskolai matematika oktatásban jóval nagyobb szerepet kapjon a statisztika mint eddig. Az egyik főforrásnak kellene lennie a valószínűségszámítás tanítása szempontjából: is, hiszen a statisztikai kérdésfeltevések, döntési mechanizmusok kitűnő motivációs bázist teremtenének a tanulók számára a szerencsejátékok mellett. Remélhetőleg ezt már ebben az első részben is meg tudjuk mutatni.

Az elmúlt években lehetőségem nyílt külföldi tapasztalatokat is szerezni, természetesen ezeket is meg szeretném osztani az érdeklődő tanárkollégáimmal. A sorozat célja a téma helyzetének áttekintésén kívül egy lehetséges tanítási koncepció bemutatása. Mindezt igyekszem konkrét példákkal illusztrálni hiszen enélkül túl elméletinek tűnhetne az elképzelés. Szeretném felhívni a figyelmet arra is, hogy párhuzamosan a KöMaL-ban is megjelenik egy cikksorozatom, amely inkább tanulóknak íródott, de talán a kollégáknak sem haszontalan, ha bele tudnak nézni. Emellett a témáról tavaly tartottam előadást, amelynek leadott változata egy kötetben olvasható lesz, a Varga Tamás napokon elhangzott egyéb előadásokkal (1). Ezen az előadáson a valószínűség fogalmának nehézségeiről, tanítási problémáiról beszéltem. Ezúttal elsősorban a statisztikai hipotézisekre, és a tesztekre helyezném a hangsúlyt, ezek tanulmányozása vezetne el az esélyekhez. Nagyon érdekes M. Borovcnik kísérlete lásd (2), illetve (3), amelyben a leíró statisztikától úgy próbál eljutni a hipotézisek teszteléséhez, hogy közben a felhasználni kívánt valószínűségszámítási apparátust minimalizálni igyekszik, éppen a szélesebb körű iskolai felhasználhatóság érdekében. Erről is fogunk szólni a későbbiekben.

Kezdjük egy példa elemzésével, amelynek kapcsán könnyen meg tudjuk mutatni az alapfogalmakat, a gondolat lényegét, s azt is, hogy általában milyen matematikai apparátust kell használnunk.

A példa olvasható [4]-ben a 189.oldalon, illetve hasonlóak pl. [5] illetve [6] kiinduló feladatai. Szeretném egy kicsit mélyebben elemezni a problémát, s több számítást is végezni.

1.Probléma: Sanyi azt állítja, hogy meg tudja különböztetni a Kőbányai sört, a Kinizsitől, és Jóskával fogad 100 Ft-ban. Természete-

sen Sanyi nem gondolja, hogy abszolút szakértő lenne, és a sörök sem teljesen egyformák. Mindenesetre azért úgy gondolja, ha nem is 100 %-ban, de az esetek jóval több, mint a felében igaza van. A döntést nyilván egy próba előzi meg. Kitalálják, hogy 10-szer kell Sanyinak próbát tennie, hogy az elé tett 2 különböző pohár sörből a Kőbányait felismerje. A vita tárgya az, hogy ebből hányat kell eltalálnia ahhoz, hogy a pénzt ő nyerje, s mely esetekben legyen Jóskáé a pénz. Vajon, ha legalább 8-at eltalál a 10 esetből mennyire jogos, hogy övé a pénz?

Kezdjük el elemezni a problémát. Jóska szerint Sanyi csak ,,totózik'', azaz véletlenszerűen választ, hiszen nem is ért a sörhöz. Mi van, ha Jóskának igaza van? Ha Sanyi teljesen véletlenszerűen tippel, akkor a találat esélye 1/2. Ekkor 10-ből legalább 8-at eltalálni az a $B_{10;1/2}$ eloszlás (az $n=10$, $p=0,5$ értékekhez tartozó binomiális eloszlás) utolsó 3 tagjának (9., 10., 11.) összegéből adódik Ez konkrétan is könnyen számolható: a három utolsó binomiális együtthatónak $1 + 10 + 45 = 56$ az összege s mindegyiket még $(1/2)^{10}$-nel kell szorozni, azaz $56/1024 = 0,055$. Ha tehát Jóskának igaza van abban, hogy Sanyi csupán hősködik, akkor 94,5% eséllyel ő is nyeri a pénzt.

Ez fogalmazható úgy is, hogy Jóska hipotézise: Sanyi találati esélye $p = 0,5$. Annak esélye pedig, hogy igaza van, mégis veszt csupán 0,055. Ez azt jelenti, hogy annak a téves döntésnek az esélye, hogy a hipotézis igaz mégis elvetjük, itt csupán 0,055. ,,A hipotézis igaz, mégis elvetjük.'' esélyét szokás elsőfajú hibának nevezni. A másik lehetőséget, hogy Sanyi tényleg ért a sörhöz, tehát $p > 0,5$, amit gyakran neveznek ellenhipotézisnek. Annak az esélyét – hogy a feltett ellenhipotézis igaz, mégis a hipotézist fogadjuk el – nevezik általában másodfajú hibának. Ennek jelentése esetünkben az, hogy Sanyi ért a sörhöz mégis veszt. Az esély nehezebben számolható, hiszen ehhez el kellene dönteni, milyen mértékű hozzáértést akarunk díjazni. Ha például 90 %-os biztonságú ítéletből indulunk ki ($p = 0,9$), akkor vajon milyen eséllyel fordul elő, hogy mégis veszt (ez ebben az egy konkrét esetben a másodfajú hiba lesz)? Ehhez a $B_{10;9/10}$ eloszlást kell vizsgálnunk, méghozzá egyszerűbb a nyerési esélyt, hiszen ehhez csak három tag kell:

$$\binom{10}{10}\cdot 0,9^{10} + \binom{10}{9}\cdot 0,9^{9}\cdot 0,1 +$$

$$+\binom{10}{8}\cdot 0,9^{8}\cdot 0,1^{2} = 0,9298$$

tehát annak az esélye, hogy kevesebbet talál el, mint 8 igen kevéssé valószínű körülbelül 7 %. Ha tehát Sanyi 90 %-os szakértelmet gondol Jóska pedig ezt abszolút módon vonja kétségbe, tehát egyszerűen csak véletlen tippelésnek tartja Sanyi működését, akkor mindkettőjük számára elfogadhatónak látszik a 8, mint küszöbszám, hiszen mindkettő igaza esetén kis eséllyel (igaz nem egyenlő, hiszen 0,055 és 0,070) veszít. Ezen feltételek mellett a 9 Sanyinak már túl kedvezőtlen, mert hiszen igaza esetén is $\approx$ 26,5 % eséllyel veszt, míg Jóska tévedése 1 % alatt van (azaz, hogy fizet bár Sanyi csak tippelt), így ezt Sanyi nem fogja már elfogadni.

A másik változat, hogy 7 legyen a küszöb, ekkor Jóska 17 % eséllyel veszthet (ha csak tippel is Sanyi), míg ekkor Sanyi (0,9-es szakértelme esetén) csak 1,3 % eséllyel veszt, azaz ez meg Jóskának nem látszik elfogadhatónak. Tehát teljesen igazságos döntés (azonos vesztési esély ha igazuk van) nincs, de a 8-as küszöb áll legközelebb az igazsághoz. Mielőtt megvizsgálnánk, hogyan lehet mégis javítani a kísérlet biztonságát mindkét fél számára, jegyezzük meg, hogy fix kísérletszám mellett, ha az elsőfajú hibát csökkenteni akarjuk, akkor a másodfajú hiba nőni fog, s fordítva hasonlóan, ha a másodfajú hibát csökkenteni akarjuk, akkor az elsőfajú hiba nőni fog. Ez jól látható a példánkon, de némi meggondolással látszik, hogy rögzített p illetve kísérletszám mellett ez mindig így van. Ebből következik, hogy mindig van ,,legigazságosabb'' döntés, amikor a két hiba különbsége minimális. Mivel a lépegetés diszkrét, ezért a 0 differenciát, azaz a teljesen igazságos játékot általában nem lehet elérni, de van ehhez legközelebbi érték. Mi történik azonban, ha növeljük a kísérletszámot? Ekkor

mindkét hiba egyidejűleg válhat kisebbé. Pl. ha 20 sörből kell dönteni a kísérletezőnek, és éppenúgy keressük a minimumát a két hiba különbségének, s azon a helyen húzzuk meg a döntés határát, amikor a különbség a legkisebb. Mindkét hiba ezen a helyen jóval kisebb lesz, mint a 10 kísérlet esetén. A két eloszlás ezúttal a $B_{20;1/2}$, illetve a $B_{20;0,9}$ binomiális eloszlások. Közöljük annak az esélyeit[1], hogy ha a küszöbök, és igaza ellenére Jóska veszt – tehát az elsőfajú hibát – illetve hogy Sanyi veszt $p = 0,9$ mellett, ami a másodfajú hiba.

k	α elsőfajú hiba	β másodfajú hiba	$\lvert\alpha - \beta\rvert$
13	0,0577	0,0004	0,0573
14	0,0207	0,0024	0,0183
15	**0,0059**	**0,0113**	**0,0054**
16	0,0013	0,0432	0,0419
17	0,0002	0,1330	0,1328

Ebből látható, hogy a hibák közötti minimális eltérés a 15-ös küszöb esetén van, tehát legigazságosabb, hogy Sanyinak legalább 15 esetben kell sikert elérnie, s ekkor Jóska igaza esetén, csak $\approx 0,6$ % eséllyel veszt, míg Sanyi helyzete kicsit rosszabb, ő hasonló esetben 1,1 % eséllyel veszt. Rajta javítana, ha 14 lenne a küszöb, ekkor azonban Jóska vesztési esélye már több mint 8-szorosa lenne az övének, míg itt kevesebb, mint kétszeres volt a viszony (igaz fordítva Jóska javára). Látható, hogy itt a hibák a 10 kísérlet optimumához képest lényegesen megjavultak, hiszen ott 8 esetén a $\alpha \approx 5,5$ % (majdnem 10-szerese az újnak!), $\beta \approx 7$ % (ez is majdnem hétszeres javulás). Tehát mindkét fajta hiba egyidejűleg csökkenthető, ha a kísérletek számát növeljük. A javulás mértéke a lineárisnál lényegesen jobb. Ez is lényeges észrevétel.

Más azonban teljesen a helyzet, ha Sanyi már a 75 %-ot szakértelmének tartja ($p = 0,75$), és ebben Jóska is egyetért. Ekkor a 8-as küszöb már Sanyinak túl magas, hiszen csak 0,5256 az esélye, hogy eléri a találatainak száma a 8-at, míg 47,44 % eséllyel veszít. Jóska esélyei nem változtak, hiszen ő továbbra is az 1/2 hipotézisét tartja. Ezért Sanyi ekkor nem fogadhatja el a 8-at, mint küszöböt. Ekkor a 7 sokkal igazságosabb, hiszen ekkor Sanyi igaza esetén $\approx 22,4$ % eséllyel veszt, míg ugyanez a szám Jóskánál $\approx 17,19$ %, amely ha nem is egyenlő, de az eltérés itt a legkisebb, a 8 Sanyinak, a 6 pedig Jóskának lesz már elfogadhatatlan (ekkor a vesztési esélyek: Sanyi esetében kisebb, mint 8 %, míg Jóskánál 37,8 %, tehát majdnem 5-szörös). Ekkor tehát az optimális kompromisszum a 7, mint küszöb. Látható, ha a szakértelmet alacsonyabbra vesszük, az ,,igazságos'' küszöb is lejjebb kerül, viszont mindkét hiba nő! Ezen csak a kísérletszám növelésével lehet segíteni. Tehát ha a két hipotézis, amely között dönteni kell (utoljára a $p = 0,5$, vagy $p \geqq 0,75$) közeledik egymáshoz, akkor a küszöbnél fellépő két hiba is növekszik. Az is jól látszik, hogy ezek ellentétesen viselkednek, ha az egyiket csökkenteni akarom, akkor a másik nő, és fordítva. Egyetlen lehetőség van, ha mindkettőt csökkenteni akarom, a próba kísérleteinek növelése. A nagy számok törvénye éppen azt jelenti, hogy ,,elegendően'' sok kísérlet esetén még abban a kérdésben is dönteni tudok, hogy egy pénzérme esetén a fej valószínűsége 0,50 vagy inkább 0,51, mégpedig mondjuk 1 % alatti első és másodfajú hibával! Az igaz, hogy a dobásszám a csillagos égben lesz, s ezért inkább engedünk a biztonságból. Ennek pontos megfogalmazására, valamint a szükséges kísérletszám becslésére még később visszatérünk, hiszen ez a valószínűségszámítás egyik központi kérdése.

Fellép azonban egy másik probléma, ha nő a kísérletszám, akkor egyre nagyobb n paraméterű binomiális eloszlásokkal kell számolni, ráadásul ezeknek egyre több tagját kell összegezni. Ez egy komoly számítási problémát jelent, amelynek az egyetlen megoldása a közelítő számítások bevezetése. Ezek közt a leggyakoribb a Gauss-féle normális eloszlással történő közelítés. Mivel erről a KöMaL várhatóan januári száma közli egy cikkemet [8], ezért itt csak néhány didaktikai megjegyzést fűzök a kérdéshez.

[1] A táblázat amelynek alapján az adatokat közöltük megtalálható pl. [7]-ban a 266. oldalon.

1. Mivel még a jelenleg ismert legegyszerűbb levezetés is az analízis mélyebb ismeretét feltételezi, hiszen nem csak egyszerű határérték kiszámításáról van szó, a faktoriálisok becslésére kell a Stirling formula

$$\left(n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\right),$$

amelynek bizonyítása komoly integrálszámítást, vagy egy hihetetlenül kifinomult, s hosszú elemi okoskodást használ, és nyilván még egy fakultatív csoport terhelhetőségét is meghaladja. Ezért tehát a klasszikus felfogás alapján – miszerint a matematika a középiskolában már egy szigorúan deduktív tudomány, tehát minden állításunkat bizonyítani kell nem tanítható a binomiális eloszlás normálissal történő közelítése!

2. A számítógép szerepe a matematikaórán nem léphet túl a számítások, esetleg bizonyos algoritmusok lefuttatásán. „Igazolni valamit" nem lehet a számítógéppel, ezt is sokan tekintik alapelvnek. Ezt azért írtam le, mert egy másik nem deduktív levezetést, éppen számítógépes grafikával lehet bemutatni.

Lehetőség van arra, hogy megmutassuk hogyan működik ez a közelítés, ezután pusztán közöljük, hogy milyen feltételek mellett használható, de ezt nem bizonyítjuk, csak hivatkozunk a számítógépes tapasztalatra. Ha ezt megengedjük, akkor nem csak kis számokra, hanem valódi nagyobb statisztikákra vonatkozó feladatokat is szerepeltethetünk, s a tanulók nem esnek el egy érdekes gondolkodásmód megismerésétől, bizonyos technikai nehézségekre való hivatkozás miatt. Természetesen dönthetünk a normális eloszlás alkalmazása ellen is, még ez is ad lehetőséget, mint éppen most láttuk, a hipotézisek tesztelése közben felmerülő kérdések megválaszolására, s az alapfogalmak bevezetésére. Az főgondolat, hogy a bizonyosság feladásával, hogyan lehet döntéseink rizikóját becsülni, s ennek alapján mérlegelni, azokban az esetekben amikor biztos tudásunk vagy elvi, vagy gyakorlati okból nincs. Utóbbi kettőre is nézzünk egy példát. Azt ellenőrizni, hogy egy 10 000 egységet tartalmazó szállítmányban mennyi hibás van, elvileg lehetne, de annyi idő, pénz és munka lenne, hogy inkább engedve a biztosból egy minta alapján döntünk valamilyen eljárással. Ez tipikus statisztikai feladat, minden közvéleménykutató intézet, felmérés hasonló elveken alapul, s fontossága miatt erről is még részletesen fogunk beszélni. A másik helyzetre, amikor elvi oka van a biztos információ hiányának, egy példa a következő szituáció: egy adott sokaságról, például a magyar választókról szeretnénk tudni, hogy hogyan fognak voksolni egy népszavazáson. Ekkor hiába kérdeznénk meg előre akár mindenkit, a döntési szituációt nem tudjuk teljesen utánozni, így aki a próbán igent mond, az mondhat nemet a valódi szavazáson, s fordítva is. Ezt ezért aztán nehéz is lesz modellezni. Egy másik egyszerűbb példa egy dobókocka esélyeloszlása, amely a valóságban a legritkább esetben teljesen szabályos, azonban semmilyen módon nem tudjuk megmondani kísérletek nélkül, milyen eloszlású. A kísérletek számának a növelésével javítható lesz az esélyünk a valóság megközelítésére, de teljesen biztos eredményt elvileg lehetetlen mondani.

Foglaljuk össze röviden az eddigieket!

Adott egy szituáció, amelyben van egy hipotézisünk (H_0). Ezután készítünk egy statisztikát (S), azaz teszteljük a hipotézisünket. A statisztika alapján bizonyos rizikóval elfogadjuk vagy elvetjük azt. Ehhez előre eldöntünk egy küszöböt, ha $S > k$ akkor pl. elvetjük, ha $S \leqq k$ akkor nem. Mindkét esetben követhetünk el hibákat, ha elvetjük a jót, az az elsőfajú hiba $\alpha = P(S > k \mid H_0$ igaz), míg a rossz elfogadása a másodfajú hiba. Ezt azonban csak konkrét ellenhipotézisre lehet kiszámolni, azaz ha H_0 jelentette példánkban a $p = 0{,}5$ esetet, akkor β csak p függvényében számolható $\beta_p = P(S \leq k \mid H_p)$, ahol H_p jelenti azt a hipotézist, hogy Sanyi szakértelme éppen p a fenti példánkban. Ezt a gondolkodásmódot nevezik klasszikus statisztikának, amikor a statisztikát a hipotézis feltétele mellett számolják ki. Ez valójában egy kényszermegoldás, mivel igazából minket nem ez érdekelne, hiszen a fordított kérdés az igazi, ha a statisztika eredménye adott, akkor ezen feltétel mellett mennyi a hi-

potézis teljesülésének az esélye. Azaz $P(H_0$ igaz $\mid S = s)$ lenne az igazi kérdés. Aki ismeri a Bayes tételt a klasszikus valószínűségszámításból, az tudja, hogy milyen formulával lehet a két esélyt egymásból megkapni. A következő részben ennek a kérdésnek fogunk teret adni, amelyet Bayes-statisztikának neveznek, szemben a klasszikus statisztikával. Előzetesen ajánlható olvasásra: [9], [10), vagy [11].

Irodalom

[1] Vancsó Ödön: Valószínűségszámítás és statisztika a középiskolában kézirat

[2] M.Borovcnik: Statistik im Selbststudium - Von der beschreibenden zur beurteilenden Statistik Lehrtext und Glossar Klagenfurt 1981

[3] M.Borovcnik: Zum Schätzen von Mittelwerten - Ein intuitiver Zúgang zu Vertrauensintervallen Didaktik der Math. 1, (1987) 49-79.

[4] Kemeny-Snell-Thompson: A modern matematika alapjai Műszaki Könyvkiadó 1971.

[5] M. Levine, R. H. Rolwing: Coke or Pepsi? Teaching Statistics Vol.15 Number 1, p. 4-5. (1993)

[6] D.V Lindley: The analysis of experirnental data the appreciation of tea and wine Teaching Statistics Vol.15 Number 1, p. 22-25. (1993)

[7] A. Schmidt-J. Stark: Stochastik Leistungskurs E. Klett Schulbuchverlag 1988.

[8] Vancsó Ödön: Mit lehet nyerni, ha kicsit engedünk a biztosból Kézirat a KöMaL-nak leadva.

[9] D. Wickmann: Bayes-Statistik Wissenschaftverlag Mannheim/Wien/Zürich 1990.

[10] Borovcnik:Im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik Wissenschaftverlag Mannheim/Wien/Zürich 1992.

[11] V. Barnett: Comperative Statistical Inference John Wiley&Sons second edition 1982.

Urbán Eszter

Az 1991-92. tanévi belgiumi (flandriai) matematikai olimpia első fordulójának feladatai

1. A következő számok közül melyik a legnagyobb?

(A) 2^{514} (B) 4^{258} (C) 8^{171} (D) 16^{128} (E) 32^{103}

2. Hány eleme van a $\mathbb{Q}$ következő részhalmazának:

$$\left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{N}; 1 \le p \le 10 \text{ és } 1 \le q \le 10\right\}?$$

(A) 20 (B) 50 (C) 63 (D) 83 (E) 100

3. Az $n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ definíciót használjuk. Például $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Az 1991!-t elosztjuk 1992-vel, az r maradék kielégíti a következő állítást:

(A) $r = 0$ (B) $1 \le r < 191$ (C) $191 \le r < 591$
(D) $591 \le r < 1291$ (E) $1291 \le r \le 1991$

4. Jelölje az a^b hatványt $a * b$. Ezzel a jelöléssel

$$\frac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2} =$$

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 1 (D) 4 (E) 256

5. Ha $-1 < 2x + 3 < 1$, akkor $-2x + 4$ a következő két határ között van:

(A) 2 és 6 (B) -2 és 0 (C) 0 és 2 (D) 2 és 4 (E) 6 és 8

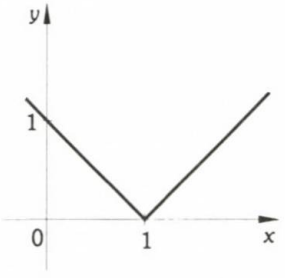
6. Egy 9 cm élhosszúságú tömör kockát kívülről teljesen befestünk, majd 27 darab, egyenként 3 cm élű egybevágó kis kockára vágjuk. A kiskockák be nem festett oldalainak összterülete egyenlő:

(A) 243 cm^2 (B) 324 cm^2 (C) 486 cm^2 (D) 648 cm^2 (E) 972 cm^2

7. Egy derékszögű háromszögben meghúztuk a két hegyesszög szögfelezőjét, ezek a háromszög belsejében egy P pontban metszik egymást. A P távolsága az átfogótól $\sqrt{8}$. Milyen messze van P a derékszögű csúcstól?

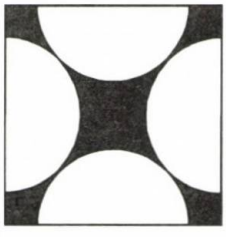
(A) $\sqrt{8}$ (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ (E) 4

8. Az ábrán látható grafikon annak a függvénynek a képe, amelyet úgy kapunk, hogy x-hez hozzárendeljük a következőt:



(A) $|x| + 1$ (B) $|x| - 1$ (C) $|x - 1|$ (D) $|x + 1|$ (E) $1 - |x|$

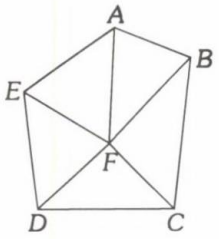
9. Az ábrán egy egységoldalú négyzet látható, amelyben négy, szimmetrikus helyzetű, egybevágó félkör van, amelyek érintik egymást. A sötétített rész területe:



(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $1-\frac{\pi}{4}$ (C) $4 - \pi$

(D) $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (E) egyik sem az előzők közül

10. Az ábrán látható A, B, C, D, E és F pontokat akarjuk kiszínezni úgy, hogy bármely két pont, amelyet szakasz köt össze, különböző színű legyen. Hány színre van szükségünk?



(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

11. Az n mely értékeire lesz $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ osztható 5-tel?

(A) $n = 1980$ (B) $n = 1988$ (C) $n = 1990$ (D) $n = 1992$
(E) $n = 2000$

12. Szuper-Bolha megdönti a távolságugrásban elért addigi világcsúcsot! Az ugráshoz készülődve először 1 egységet ugrik jobbra, majd kétszer akkorát balra, azután megint kétszer akkorát jobbra, és így tovább, hol jobbra, hol balra, mindig megkétszerezve az ugrások hosszát. A $2n + 1$-edik ugrás után a kezdőpont és a végpont közti a távolságra igaz a következő:

(A) $a \le 2^{2n-1}$ (B) $2^{2n-1} < a < 2^{2n}$ (C) $a = 2^{2n}$
(D) $2^{2n} < a < 2^{2n+1}$ (E) $2^{2n+1} \le a$

13. Hány n egész szám ($1 \le n \le 500$) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

(A) 83 (B) 84 (C) 166 (D) 167 (E) 417

14. Hány k értékre van a következő kétismeretlenes egyenletrendszernek legalább egy megoldása?

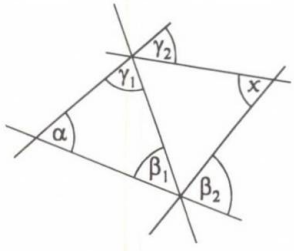
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y = 3 \\ x + ky = 5 \end{cases}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) végtelen sok

15. Egy egységsugarú, O középpontú körben meghúztuk az AB átmérőt, majd a körbe írt négyzet BC oldalát, ezután a körbe írt szabályos nyolcszög CD oldalát is megrajzoltuk. Végül a D pontot összekötjük az O-val. Az így kapott $BCDO$ konvex négyszög területe:

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{4+\sqrt{2}}{8}$ (E) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

16. Az ábrán látható α, β_1, β_2, γ_1, γ_2 szögekre a következők igazak: $\alpha < 60°$, $\gamma_1 = 2\gamma_2$ és $\beta_1 = 2\beta_2$. Ezekből következik, hogy $x =$



(A) $90° - \frac{3}{2}\alpha$ (B) $90° - \alpha$ (C) $180° - 3\alpha$
(D) α (E) $180° - 2\alpha$

17. Jelölje $[a]$ (a egész része) az a-nál nem nagyobb, legnagyobb egész számot. Például $[1992] = 1992$, $[1{,}5] = 1$, $[-9{,}2] = -10$. Hány valós gyöke van a következő egyenletnek:

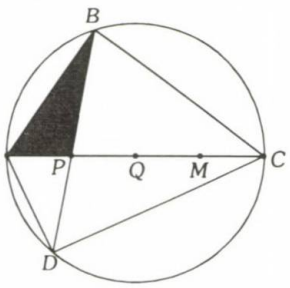
$$[2 - x^2] = |2 - x^2| \ ?$$

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) végtelen sok

18. Adott a következő függvény: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x + \cos x$. Az f a pozitív valós számok $\mathbb{R}^+$ halmazát a következő intervallumra képezi le:

(A) $[-1; 1]$ (B) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ (C) $[-2; 2]$ (D) $\left[0; \sqrt{2}\right]$ (E) $[0; 2]$

19. A kör AC átmérőjét a P, M és Q pontok négy egyenlő részre osztják. A P-n áthaladó szelő a kört a B és D pontokban metszi úgy, hogy $|PD| = \frac{3}{2}|AP|$. Tegyük fel, hogy az ABP háromszög területe 1, akkor az $ABCD$ négyszög területe:



(A) 7 (B) 7,75 (C) 8
(D) 8,5 (E) 9,25

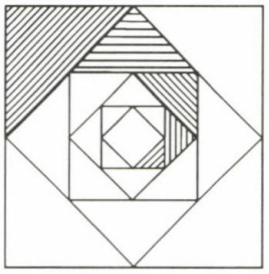
20. Adott három derékszögű háromszög alakú lemez, a befogók rendre (3 dm, 4 dm), (4 dm, 5 dm) és (5 dm, 3 dm). A lemezeket az egyenlő hosszú befogók mentén összeragasztjuk. A kapott dobozba legfeljebb hány liter víz fér?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 30

21. A kerékpáros a pedál egy körülforgatásával 6 métert tesz meg. Kerékpárján a pedál tengelyén levő fogaskeréken 40 fog, a hátsó kerékre rögzített fogaskeréken 15 fog van. Ha a pedál fogaskerekén 60 fog, a kerékhez rögzítetten 20 fog lenne, akkor a pedál egy körülforgatásával hány métert tenne meg?

(A) 3 (B) 5,333... (C) 6 (D) 6,75 (E) 12

22. Adott egy 1 egységoldalú négyzet. Az oldalak felezőpontjait összekötve egy új négyzetet kapunk. Az új négyzettel ugyanezt csináljuk és az eljárást folytatjuk a végtelenségig. Ezután tekintsük az eredeti négyzetből az első lépésben kapott négyzet elhagyása után megmaradó négy kis derékszögű háromszög egyikét, például a bal felsőt, majd a következő négyzetből megmaradó négy kis háromszög közül az ehhez jobbról csatlakozót, és így tovább (az ábrán az első 5 lépésben kiválasztott háromszög van bevonalkázva). A kiválasztott, egymáshoz csatlakozó kis háromszögek együttes területe:



(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

23. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és tekintsük az összes $f: A \to A$ függvényt. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk egy f függvényt, mi a valószínűsége, hogy f bijektív?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{3}{32}$ (E) $\frac{1}{64}$

24. Három házaspár közös vacsorán vett részt. Amikor valaki belépett az ebédlőbe, kezet fogott az ott már jelenlevőkkel, kivéve a saját házastársát (a házaspárok nem feltétlenül együtt mentek be az ebédlőbe). A végén egyikük megkérdezte az összes többi résztvevőt, hányszor fogott kezet és 5 különböző választ kapott. A kérdező hányszor fogott kezet, amikor belépett az ebédlőbe?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

25. Adott a síkon egy derékszögű koordinátarendszer és tekintsük a síkon az ún. rácspontokat, azaz az olyan pontokat, amelyek mindkét koordinátája egész szám. Legkevesebb hány P_1, P_2, ..., P_k rácspontot kell vennünk ahhoz, hogy biztosak legyünk benne, legalább egy P_iP_j $(i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k)$ szakasz felezőpontja is rácspont?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

26. Az $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ egyenlet valós gyökeinek száma:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

27. Az $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény definíciója:

$$f(n) = \begin{cases} n-3, \text{ ha } n \geq 1000 \\ f(f(n+6)), \text{ ha } n < 1000 \end{cases}$$

Ekkor $f(1992) - f(1) =$

(A) 989 (B) 992 (C) 1988 (D) 1991 (E) nem kiszámítható

28. Az ABC háromszg B és C csúcsa rögzített, A csúcsa úgy változik, hogy közben az A és B csúcsból induló súlyvonal mindig merőleges egymásra. Az A csúcshoz tartozó magasságvonal maximális hossza:

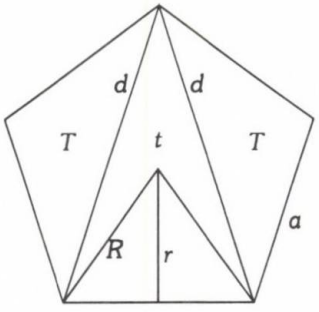
(A) $\frac{|BC|}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}|BC|$ (C) $\frac{3}{4}|BC|$ (D) $\frac{3}{2}|BC|$

(E) tetszőlegesen hosszú lehet

29. Tekintsük egy kocka három, páronként kitérő élének három felezőpontját. Az ezen a három ponton átfektetett sík a kockából a következő síkidomot metszi ki:

(A) szabályos háromszög (B) nem szabályos háromszög (C) négyszög
(D) nem szabályos hatszög (E) szabályos hatszög

30. Egy szabályos ötszög egyik csúcsát összekötöttük a szemközti oldal két végpontjával. Ez a két átló az ötszöget felbontja egy t területű hegyesszögű egyenlőszárú háromszögre és két egybevágó, T területű egyenlőszárú háromszögre. Jelölje R, r, a és d sorra az ötszög köré, az ötszögbe írt kör sugarát, az ötszög oldalát és átlóját. A következő összefüggés igaz:



(A) $ta = Td$ (B) $tR = Td$ (C) $tr = Ta$
(D) $ta = T(r + R)$ (E) $ta^2 = Td^2$

A helyes válaszok rendre:

B	C	A	E	E	E	E	C	B	C
C	B	D	B	C	A	D	B	A	B
D	B	D	C	D	A	B	C	E	A

Érdemes még megjegyezni, hogy az 1991/92. tanévi matematikai olimpia második fordulójában Belgiumban az 1992. évi AHSME („amerikai verseny") feladatait tűzték ki. Ezeket az olvasó A Matematika Tanítása 1993. évi 5. számában találja meg. Az olimpia 3. fordulójában, a döntőben 4 „hagyományos" feladatot kellett megoldani a versenyzőknek.

Feladatrovat - tanároknak

Örömmel indítjuk útjára az újjáalakult Matematika Tanításában a *tanároknak* szóló feladatrovatot. A „régi" lapban ez a rovat egyik várva várt „olvasmány" volt. Öröm felidézni a rendszeres megoldók lakóhelyeit is az 1980-as évekből: Galánta, Észak-Komárom, Érsekujvár, Ungvár, Brassó, Marosvásárhely, Nagyszalonta és természetesen magyarországi városok és kisebb települések.

Az új lap olvasói is kérték, újítsuk fel ezt a rovatot. Kellemes szórakozást, sikeres feladatmegoldást kíván a kollégáknak

a szerkesztő

FELADATOK

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **1052 Budapest, Petőfi S. u. 10. II. 10.** Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** 1994. március 31.

1. Az $ABC_\triangle$ belsejében felvett P pontra $BAP\sphericalangle = 20°$, $PAC\sphericalangle = 80°$, $PBA\sphericalangle = 10°$és $PBC\sphericalangle = 30°$. Mekkora az $APC\sphericalangle$?

2. Igazoljuk: nincs négyzetszám, amely *tökéletes* szám is. *(Ambrus Gabriella, Budapest)*

3. Legyen $\mathbb{N}^*$ a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának egy végtelen részhalmaza.
Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{N}^*$ elemeiből kiválasztható vagy egy olyan végtelen részhalmaz, amelyben bármely két elemnek van közös prímosztója, vagy egy olyan végtelen részhalmaz, amelynek bármely két eleme relatív prím!

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely $ABCD$ tetraéderben

$$AB \cdot CD < AC \cdot BD + AD \cdot BC$$

(The Math. Gazette)

5. Mutassuk meg, hogy minden pozitív n egészre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2.$$

(Kvant)

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x_1 = 2x_2^2 - 1$$
$$x_2 = 2x_3^2 - 1$$
$$\vdots$$
$$x_n = 2x_1^2 - 1$$

(Bencze Mihály, Brassó)

Matematika feladatmegoldó verseny III. forduló

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztályosoknak)

94.1. Adott egy kör és a kerületén 5 pont. Az egyik pontot pirosra festjük, a többit zöldre. Ezután nézzük az összes olyan (konvex) sokszöget, amelyeknek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki (ezek között vannak háromszögek, négyszögek és ötszögek is). Melyik sokszögből van több, amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs piros csúcsa?
Válaszold meg ugyanezt a kérdést akkor is, ha a kör kerületén 1994 adott pont van, ezek közül festjük az egyiket pirosra, a többi 1993-at zöldre!

94.2. Az 1, 2, 3, 4, ..., 14, 15, 16 pozitív egész számokat osszuk két 8-as csoportba úgy, hogy ha az egyik csoportban kiszámítjuk bármelyik két (különböző) szám összegét, akkor pontosan ugyanazokat a számokat kapjuk eredményül (és mindegyiket ugyanannyiszor), mnt ha a másik csoportban elvégezzük ugyanezeket az összeadásokat!

94.3. Egy iskolai bálon összesen 42 fiú és lány táncolt. Az első lány táncolt 7 fiúval, a második 8 fiúval, és így tovább, minden következő lány eggyel több fiúval táncolt, végül az utolsó lány az összes fiúval táncolt. Hány lány és hány fiú táncolt a bálon?

94.4. Peti fogott 25 katicabogarat és egy 5 egység oldalú négyzetet 25 darab 1 egységoldalú négyzetre osztott, ezután mindegyik katicabogarat rátette egy-egy kis négyzetre. Egy óra múlva észrevette, hogy mindegyik katicabogár átmászott egy a „saját" kis négyzetével közös oldallal rendelkező szomszédos kis négyzetre.Lehetséges-e, hogy ekkor is mindegyik kis négyzeten csak egy katicabogár volt?

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztályosoknak)

94.5. Egy három egység oldalú kockát 1 egység oldalú kiskockákra vágunk szét. A kapott 27 kiskockából hány *pár* olyan kocka választható ki, amelyeknek legfeljebb 2 csúcsa közös (az eredeti, nagykockában elfoglalt helyzetükben)?

94.6. Van-e olyan pozitív egész n szám, amelyre $\frac{n-6}{15}$ és $\frac{n-5}{24}$ egyszerre egész számok?

94.7. Adott egy téglatest, amelynek egy csúcstól kiinduló három éle sorra 2, 4 és 6 egység. A téglatestet egységoldalú kiskockákra vágjuk ezután mindegyik kiskockát 8 adott szín egyikével kiszínezzük a következő szabály szerint: ha két kis kockának csak egy közös csúcsa is van (az eredeti téglatestben), akkor azokat különböző színűre festjük. Mutassuk meg, hogy ezt a szabályt betartva az eredeti téglatest 8 csúcsában elhelyezkedő 8 kiskockát mind különböző színűre kell festeni!

94.8. Ha adott a síkon három nem egy egyenesre illeszkedő pont, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy három olyan paralelogramma van, amelynek csúcsai között a három adott pont szerepel. (A paralelogramma térbeli megfelelője a paralelepipedon. Ezt a testet 6 paralelogramma határolja, amelyek közül kettő-kettő egybevágó és síkjuk párhuzamos.)

Ha adott a térben 4 nem egy síkra illleszkedő pont, hány olyan paralelepipedon van, amelynek csúcsai közt mind a 4 adott pont szerepel?

A pontverseny I. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

(A feladatok a 93/4. szám 29. oldalán jelentek meg)

A pontversenyben kitűzött feladatok más jellegűek, mint amit egy 2 órás verenyen szoktak kitűzni, vagy egy-egy szakkörön szoktak megoldani. Itt van idő egy-egy feladatot többször elővenni, többet rajzolni, szerkeszteni, többet számolni. A feladatok megoldása elmélyülést, néha kitartó munkát követel.

A megoldásokat részletesen írtuk le, természetesen a versenyzőktől nem kívánunk ilyen részletes leírást. Célunk az, hogy a kollégák munkáját könnyítsük meg, amikor a feladatmegoldásról a tanulókkal beszélnek.

93.1. A $k = 4$ esetben 4-jegyű számot kell keresni, amire igaz a feltétel. A jegyek összege 4, így csak ennél kisebb számjegyek szerepelhetnek, hiszen ha 4 is szerepelne (1-szer), akkor az 1 is előfordulna és az összeg már 5 lenne. Látható, hogy hasonló módon a 3 sem szerepelhet, mert akkor az 1 is szerepelne, a hiányzó 2 számjegy pedig legalább 0 lenne, így még egy 2-es is kellene, ami már nem lehet. Tehát legfeljebb a 0, 1, 2 számjegyek szerepelhetnek. Ezekből a következő két megoldás adódik:

1210 és 2020

A további esetekre hasonló módon okoskodva csak 1-1 megoldás adódik:

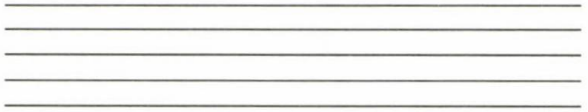
$k = 5$,	21200;
$k = 7$,	3211000;
$k = 8$,	42101000;
$k = 9$,	521001000;
$k = 10$,	6210001000.

A $k = 2$ esetben, azaz kétjegyű számra a 2 nem fordulhat elő benne, de akkor csak 1 egyes, 1 0 lehetne, azaz 11, ami nem jó!
Hasonlóan $k = 3$-ra sincs megoldás.
A $k = 6$ esetben – hasonló módon végiggondolva – nem adódik megoldás.

93.2. Hegyesszögű háromszögben bármely csúcsból a szemközti oldalra állított merőleges (magasság), derékszögű illetve tompaszögű háromszögben a derékszögű illetve tompaszögű csúcsból húzott magasság a háromszöget két derékszögű háromszögre bontja. Ezután világos, hogy újra valamelyik kapott derékszögű háromszöget két derékszögű háromszögre bonthatjuk, így 1-gyel növeljük a derékszögű háromszögek számát. Ezzel a módszerrel tehát bármely háromszöget bármely 2-nél nagyobb, adott számú derékszögű háromszögre bonthatunk.

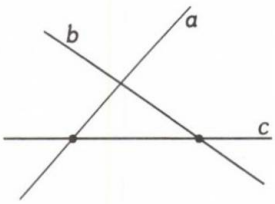
93.3. Az első kérdésre adott válaszban legalább azt várjuk el, hogy mennyi az a legkevesebb számú síkrész, amennyire 5 egyenes felbontja a síkot és mennyi a lehető legtöbb.

A lehető legkevesebb részt, 6-ot akkor kapunk, ha az öt egyenes párhuzamos egymással:



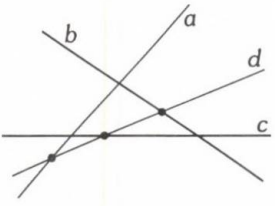
A lehető legtöbb síkrész úgy keletkezik, ha bármely két egyenes metszi egymást és nincs három olyan egyenes, amely átmegy egy ponton. Az ekkor keletkező síkrészek számát úgy könnyű vizsgálni, ha lépésenként megyünk; összeszámoljuk egy egyenes, 2 egyenes, 3 egyenes, 4 egyenes, végül 5 egyenes maximálisan hány részre bontja a síkot.

Egy egyenes két félsíkra bontja a síkot; 2 egyenes – amelyek metszik egymást – 4 részre; a harmadik egyenes, amely az első kettőt metszi egy-egy pontban, tehát 3 részre bontja (egy szakaszra és két félegyenesre) és mindegyik „egyenesrész" egy előző „síkrészt" vág ketté, tehát a síkrészek száma 3-mal nő, így 7 lesz.



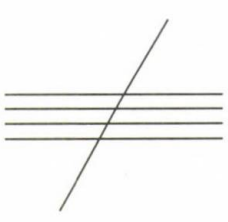
Úgy is összeszámolhatjuk a síkrészek számát ebben az esetben, hogy a három egyenes egy háromszöget alkot. A sík részei maga a háromszög, a 3 csúcsnál egy egy rész, ez 3 és a három oldalához „kifele" csatlakozóan egy-egy rész, ez is 3, így összesen 7 részt kapunk.

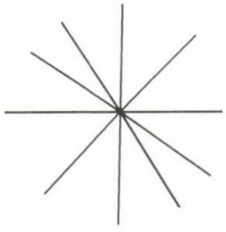
A negyedik egyenest megrajzolva úgy, hogy az előző hármat különböző pontokban messe, akkor a 3 metszéspont az új – d egyenest 4 részre vágja, ez a négy rész egy-egy „régi" síkrészt kettévág, tehát a síkrészek száma 4-gyel nő: $7 + 4 = 11$ lesz.



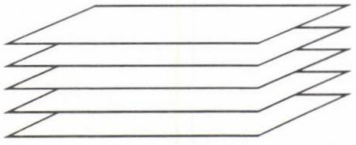
Végül az ötödik egyenest meghúzva úgy, hogy mind a négy előzőt különböző pontokban messe, azt 5 részre vágjuk, úgy a síkrészek száma is 5-tel nő, tehát összesen $11 + 5 = 16$ lesz.

Felmerülhet a kérdés, hogy a 6 és 16 között mely számok fordulhatnak elő úgy, hogy ennyi részre 5 egyenes feldarabolhatja a síkot. Rendszeresen végiggondolva a különböző lehetőségeken, kiderül, hogy az előforduló részek száma: 10, 12, 13, 14, 15. A 10 rész például a következő két ábrán látható:

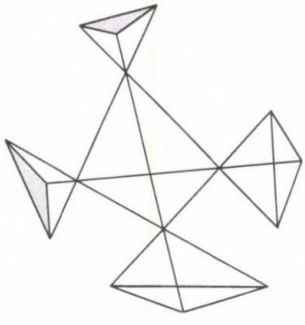




A térben legkevesebb 6 részt kapunk, ha mind az 5 sík párhuzamos egymással.

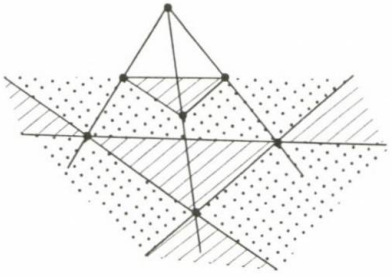


Hány részre oszthatja legfeljebb a teret öt sík? Itt is érdemes lépésenként végighaladni, de itt csak azt nézzük meg először, 4 sík legfeljebb hány részre oszthatja a teret? A négy síkot úgy képzeljük, mint egy tetraéder négy lapját (így nincs közöttük két párhuzamos sík és semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre). Jól látjuk, hogy (a háromszög analógiájára) a tetraéder test maga 1 térrész. A tetraéder csúcsainál keletkezik egy-egy térrész, ez összesen 4.



A tetraéder lapjaihoz kapcsolódik egy-egy további térrész – ez újabb 4, végül a tetraéder mindegyik éléhez kapcsolódik egy-egy „ékalakú" végtelen térrész ez 6. Így összesen: $1 + 4 + 4 + 6 = 15$ térrészt kapunk.

Képzeljük el, hogy most felvesszük az ötödik síkot úgy, hogy mind a négy előző síkot az új sík egy-egy külön egyenesben messe. Ekkor, mint az előző kérdésre adott válaszból tudjuk, a 4 egyenes az öt síkot 11 részre osztja és mindegyik síkrész egy térrészt kettévág a megfelelő 15-ből, tehát a térrészek száma 11-gyel nő: $15 + 11 = 26$ lesz.



A közbeeső lehetséges esetek teljes vizsgálatát nem vártuk el a megoldóktól. Látható például, ha az öt sík közül 4 párhuzamos egymáással, az ötödik pedig mindegyiket metszi, akkor a keletkező térrészek száma 10. Ugyanennyi térrész adódik akkor is, ha mind az öt sík egyetlen egyenesre (legyezőszerűen) illeszkedik. Egy másik példa: ha az öt sík közül kettő párhuzamos és semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre, akkor úgy szemléltethetjük, hogy egy tetraédert alkotó négy sík közül az egyikkel párhuzamos síkot állítunk. Ezt a „régiek" közül 3 sík metszi, így 7 részre vágja, mindegyik egy „régi" térrészt vág ketté, tehát a térrészek száma 7-tel nő: $15 + 7 = 22$ lesz.

93.4. Képzeletben írjuk egymás alá a szóban forgó háromjegyű számokat, mintha össze akarnánk adni őket. Az összeadást kezdjük, ahogy kell, az egyesek helyiértékén. Számoljuk össze hány helyen szerepel itt az 1 számjegy: □□1.

Az első két helyet egyelőre üresen hagytuk. Számoljuk össze, hányféle lehetőség van az első két hely „helyes" kitöltésére. Az első helyre nem írhatunk 0-t (mert ekkor nem kapunk háromjegyű számot), nem írhatunk 1-t (ez már foglalt) így a maradék 2, 3, ..., 9 számjegyek közül jöhet szóba bármelyik, ez összesen 8 lehetőség. A második helyre nem írhatunk 1-est és azt a számjegyet, amit az első helyre írtunk, de a 0 természetesen szóba jöhet. Így ide is 8 lehetőségünk van, tehát összesen $8 \cdot 8 = 64$ lehetőség. Azt kaptuk tehát, hogy az 1 számjegy 64-szer szerepel összeadandóként az egyesek helyén.

Pontosan ugyanilyen gondolatmenettel adódik, hogy a 2, 3, ..., 9 számjegy is 64-szer szerepel az egyesek helyén összeadandóként. Így tehát az egyesek helyén álló számjegyek összege (megfelelő csoportosításban):

$$64(1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9) = 64 \cdot 45 = 2880.$$

Most adjuk külön össze a tízesek helyén álló számjegyeket. Itt is először nézzük meg, hány esetben állhat 1 a tízesek helyén: □1□.

A százasok helyére itt is 0 és 1 kivételével bármelyik számjegy kerülhet, ez 8 lehetőség. Az egyesek helyén nem állhat 1 és az a számjegy, amit a százasok helyére írtunk, ez is 8 lehetőség, tehát összesen $8 \cdot 8 = 64$ számban szerepel 1 a tízesek helyén. Hasonlóan adódik, hogy a többi számjegy is 64-szer szerepel itt, tehát a tízesek helyén álló számjegyek összege is

$$64(1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9) = 64 \cdot 45 = 2880,$$

de az összegben ez $2880 \cdot 10 = 28800$-at jelent.

Végül számoljuk össze a százasok helyén álló számjegyek összegét. Legyen az első eset itt is az, amikor 1 áll a százasok helyén, nézzük meg, hány ilyen szám van: 1□□. Világos, hogy a tízesek helyére most csak az 1-est nem írhatjuk, de a többi 9 számjegy bármelyike szóba

jöhet (a 0 is), így ez 9 lehetőség. Az egyesek helyére ezt a két számjegyet nem írhatjuk, amit már rögzítettünk a százasok és a tízesek helyén így marad 8 lehetőség. Az 1 számjegy tehát a százasok helyén $9 \cdot 8 = 72$ szerepel. Teljesen hasonló módon adódik, hogy a 2, 3, ..., 9 számjegyek mindegyike 72-szer szerepel a százasok helyén, így a százasok helyén álló számjegyek összege:

$$72(1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9) = 72 \cdot 45 = 3240,$$

tehát a százasok összege: $3240 \cdot 100 = 32400$. A szóbanforgó háromjegyű számok összege tehát:

$$2880 + 28800 + 324000 = 355680.$$

Érdemes még megjegyezni, hogy ennél a számolási módnál első pillanatra talán úgy tűnik, nem jól számoltunk. A „százasokból" nézve összesen $72 \cdot 9 = 648$ ilyen szám van, míg a „tizesek" és „egyesek" helyéről nézve $64 \cdot 9 = 576$. A különbség onnan adódik, hogy minket csak az összeg érdekelt, nem a számok száma. A „hiányzó" $72 - 72$ számban a tízesek illetve az egyesek helyén 0 áll. Ezek az összeg értékét természetesen nem befolyásolják.

93.5. Számoljuk ki először azt, hány 0-ra végződik az első 100 pozitív egész szám szorzata. Azt kell megnéznünk, hogy ennek a számnak a törzstényezős felbontásában hányszor szerepel az 5 törzstényezőként , hiszen egy 5 és egy 2 tényező szorzata 10, egy 0-t jelent ez a szám „végén". A 2-es tényezők száma biztosan több, mint az 5-ösöké (hiszen minden második szám osztható 2-vel és csak minden ötödik 5-tel).

1-től 100-ig 20 szám osztható 5-tel, ez a törzstényezős felbontásban 5^{20} tényezőt jelent. Ezen túl még a 25, az 50, a 75 és a 100 5^2-nel is osztható, tehát még 4 darab 5 tényezőt adnak, így a szám 5^{24}-nel osztható, 5 magasabb hatványával nem, tehát a szám utolsó 24 számjegye 0, de a (hátulról számított) 25. számjegye 0-tól különböző.

Ennek meghatározásához válasszuk a számolás kissé hosszadalmasabb, de áttekinthetőbb módszerét: kiszámítjuk rendre – például – 10 egymást követő szám szorzata hány 0-ra végződik és mi lesz a szorzat utolsó, 0-tól különböző számjegye.
A kapott „végződések" szorzataként megkapjuk majd a keresett számjegyet.
Nézzük az első tíz pozitív egész szám szorzatát:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 10 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10^2;$$

a szorzat „végződése": 800.

A következő tíz egész szám szorzatának végződése:

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 =$$
$$= 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 10 =$$
$$= 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 10^2;$$

a szorzat „végződése": 800.

A következő szorzat végződése:

$$21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 =$$
$$= 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 6 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 3 \cdot 10 \cdot (4 \cdot 25) =$$
$$= 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 6 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 3 \cdot 10^3;$$

tehát a végződés: 2000.

Hasonlóan adódik a többi tízes szorzatok végződésére sorra:

400; 6000; 800; 800; 6000; 4000; 2000.

A végződések szorzata:

$8^4 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 10^{24}$, ennek „végződése": $4 \cdot 10^{24}$.

Tehát a keresett 25. számjegy 4.

93.6. Először alakítsuk át a különbséget szorzattá úgy, hogy kiemeljük 7^{7^7}-t:

$$7^{7^{77}} - 7^{7^7} = 7^{7^7}\left(7^{7^{77}-7^7} - 1\right).$$

Mivel az első tényező csak a 7 prímszámmal osztható, ezért $\left(10, 7^{7^7}\right) = 1$, így csak a második tényezőtől függ, hogy a szám hány 0-ra végződik, azaz 10-nek melyik az a legmagasabb hatványa, amivel a szám osztható. Foglaljuk táblázatba a 7 hatványainak utolsó 3 számjegyét a 20. hatványig (elég mindig csak az előző hatvány utolsó 3 számjegyéből álló számot 7-tel szorozni és a szorzat utolsó 3 számjegyét leírni):

n	7^n utolsó három jegye
1	007
2	049
3	343
4	401
5	807
6	649
7	543
8	801
9	607
10	249
11	743
12	201
13	407
14	849
15	943
16	601
17	207
18	449
19	143
20	001

A táblázatból kiolvasható, hogy a 7 hatványainak utolsó két jegye 4 periódussal, utolsó 3 jegye 20 periódussal ismétlődik.

Meg kell vizsgálnunk, hogy 7-nek a $7^{77} - 7^7$ kitevőjű hatványa mire végződik. Megmutatjuk, hogy 4 osztója $7^{77} - 7^7$-nek, de 20 nem osztója. Ebből következik, hogy $7^{77} - 7^7$-dik hatványa 7-nek 01-re végződik, de nem 001-re végződik, tehát $7^{7^{77}-7^7} - 1$ osztható 100-zal, de 1000-rel nem, tehát 2 darab 0-ra végződik.

$7^{77} - 7^7 = 7^7(7^{70} - 1)$. Itt $(7^7, 10) = 1$, tehát elég $7^{70} - 1$-et vizsgálni. Mivel 70 a 4-gyel osztva 2 maradékot ad ($70 = 17 \cdot 4 + 2$), ezért a táblázatból kiolvasható, hogy $7^{70} - 1$ utolsó két jegye 48, tehát 4-gyel osztható, de 20-szal nem.

93.7. Véletlen egybeesés folytán a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMal) 1993/6. számának 255-257. oldalán megtalálható lényegében a feladat teljes megoldása. Itt a KöMal 1992/8-9. számában megjelent 2805. számú gyakorlat megoldásához kapcsolódva közöl a szerkesztőség egy megoldótól származó általánosítást.

Az általunk kitűzött feladat egy lehetséges megoldádát röviden itt is leírjuk.

Induljunk ki abból, hogy egy kockát – az éleinek felezőpontján áthaladó, lapjaival párhuzamos síkokkal 8 egybevágó kis kockára bonthatunk. Ezek közül a kis kockák közül egyiket ismét 8 egybevágó (még kisebb) kockára vágva az eredeti kockát $8 + 7 = 15$ kockára daraboltuk (ezek már nem mind egybevágók). Ezt az eljárást folytatva a következő „kokaszámokhoz" jutunk:

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99.

Ha most a 27 egybevágó kis kockára darabolt kockából (a „bűvös kocka"-szerű kockából) indulunk ki, akkor a következő számokat kapjuk az előző eljárást ismételve (illetve először 8, egymáshoz csatlakozó kis kockát „összeragasztva"):

20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, 83, 90, 97.

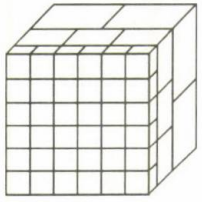
Ugyancsak a 27 egybevágó kiskockára darabolt kockából kiindulva egyik kis sarokkockát újra 27 egybevágó kockára vágva 26-tal nő a kockák száma. Itt megint „összeragaszthatunk" 8-8 egymáshoz kapcsolódó kis ill. még kisebb kockát, illetve folytathatjuk a 8 részre darabolást, így a következő kockaszámokat kapjuk:

39, 46, 53, 60, 67, 74, 81, 88, 95.

További feldarabolásokhoz jutunk el, hogyha egy kockát 64 egybevágó kiskockára bontunk és egymáshoz csatlakozó 27 kiskockát összeragasztunk. Így 26-tal csökken a kockák száma, tehát 38 lesz. Innen indulva a „szokásos" 8 részre vágásokkal a következő kockaszámokat kapjuk:

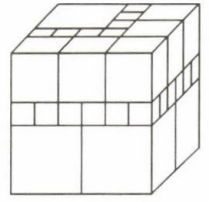
38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94.

a)



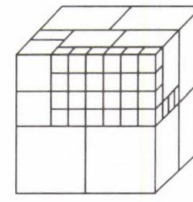
élhossz: 6
4 db 3-as
9 db 2-es
36 db 1-es
49 db

b)



élhossz: 6
5 db 3-as
5 db 2-es
41 db 1-es
51 db

c)



élhossz: 8
6 db 4-es
2 db 3-as
4 db 2-es
42 db 1-es
54 db

Az *a)* ábra azt mutatja, hogyan lehet egy kockát 49 kockára felbontani. (Az egyszerűség kedvéért az élhosszat 6 egységnek vettük). Ebből kiindulva a szokásos 7-tel növelve a következő számokhoz jutunk:

49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

A *b)* ábrán 51 kockára darabolt kockát szemléltetünk, így ebből a következőkhöz juthatunk el:

51, 58, 65, 72, 79, 86, 93, 100.

Végül a *c)* ábrán 54 kockára darabolt kockát látunk (az élhossza a nagy kockának 8 egység). Ebből indulva eljutunk a következő darabszámokhoz:

54, 61, 68, 75, 82, 89, 96.

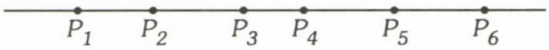
Összefoglalva megfigyelhetjük, hogy a felsorolt számok között minden 48-nál nem kisebb szám szerepel 100-ig, ez összesen 53. A 48-nál kisebb számok közül 15 szerepel:

1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46.

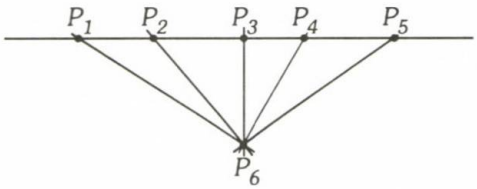
Így tehát $53 + 15 = 68$ számról láttuk be (a 100 közül), hogy ennyi kockára a kocka feldarabolható. Mindegyikhez módszert is tudunk adni.

A „kimaradt" 32 szám némelyikéről „világos", hogy ennyi kockára biztisan nem lehet felvágni a kockát (például 2-re, 3-ra). Ennek pontos bizonyítása nehéz. Némely kimaradt számról még elképzelhető, hogy lehetne hozzá feldarabolási módszert találni. Szívesen vesszük az eredményt az olvasóktól.

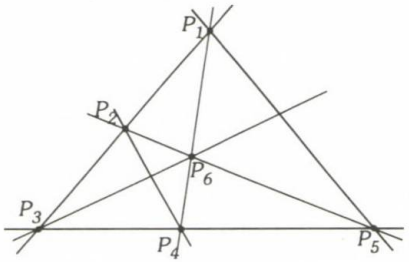
93.8. Ha a 6 pont egy egyenesen van, akkor egy egyenest határoznak meg:



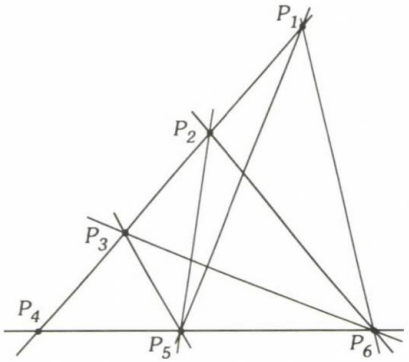
Ha 5 egy egyenesen van és a 6. nincs ezen az egyenesen, akkor 6 egyenest határoznak meg:



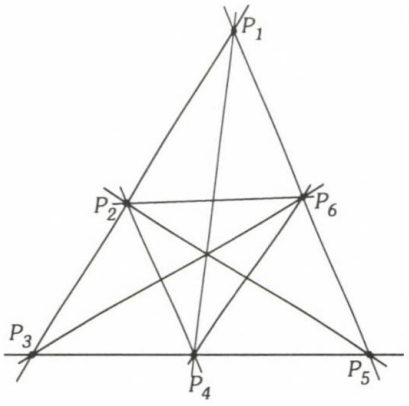
A 6 pont 7 egyenest határoz meg a következő helyzetben:



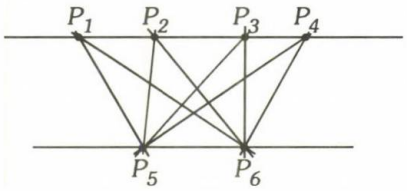
Meghatározhat a 6 pont 8 egyenest is, például így:



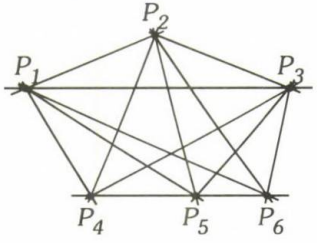
A 6 pont 9 egyenest határoz meg ebben a helyzetben:



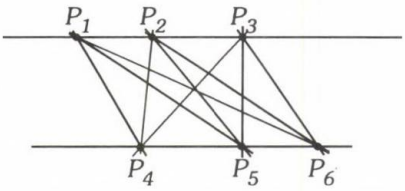
Ha a 6 pont közül 4 egy egyenesen van, a másik 2 egy ezzel párhuzamos egyenesen, akkor 10 egyenest határoznak meg:



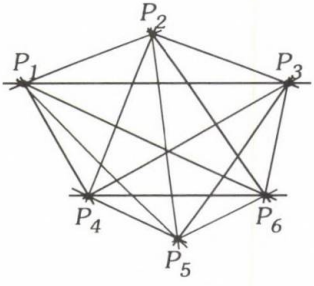
Ha most úgy képzeljük, hogy például az előző ábrán a P_2 pontot kissé „felfelé" elmozdítjuk, kiemeljük a P_1P_3 egyenesről, akkor a 6 pont által meghatározott egyenesek száma 2-vel nő: a P_2P_1 és P_1P_3 egyenessel, tehát 13 lesz:



Ha 3-3 pont egy-egy párhuzamos egyenesen helyezkedik el, akkor 11 egyenest határoznak meg:



Végül ugyanazt a P_5-tel elvégezve, azaz például az előző ábrán szereplő P_5 pontot a P_4P_6 egyenestől kissé „lefelé" elmozdítva 15 egyenest kapunk:



Világos, hogy 15-nél több egyenest nem kaphatunk, hiszen 6 pontból 2 pontot $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ féle módon választhatunk ki és így 6 pont legfeljebb ennyi egyenest határozhat meg.

Egészen más a helyzet a térben. Itt két egyenes lehet metsző, lehet párhuzamos és lehet kitérő. Az első két esetben egy síkot határoznak meg, a harmadik esetben nem határoznak meg síkot.

Könnyen látható, hogy a térben felvehető 6 egyenes úgy, hogy bármelyik kettő kitérő, így egyetlen síkot sem határoznak meg. Ugyanakkor előfordulhat, hogy a hat egyenes közül bármelyik kettő metszi egymást, így egy síkban vannak, egy síkot határoznak meg.

Érdemes végiggondolni, hogy ha az előző gondolatmenetben szereplő ábrákon úgy képzeljük, hogy minden pontra (a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontokról van szó) állítunk egy a pontok síkjára merőleges egyenest, akkor 6 olyan egyenest kapunk, amelyek közül bármelyik kettő párhuzamos. Ezek az egyenesek pontosan annyi síkot határoznak meg, ahány egyenest a kiindulásul választott pontok, hiszen bármely két párhuzamos egyenes meghatároz egy síkot. Így tehát sorra 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15 síkhoz jutunk.

Helyreigazítás

A matematika tanítása 1993. évi 5. (novemberi) számában sajnálatos félreértés folytán az egyik cikk címe és szerzőjének adatai hibásan jelentek meg. Helyesen:

A RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉSRŐL
Scharnitzky Viktor, főiskolai tanár, Budapest

Ugyancsak tévesen jelent meg az 1993. évi 4. (szeptemberi) szám 8. oldalán a címben az évszám. Helyesen:

Az 1990. évi AHMSE feladatai

Matematikai versenytesztek

A Zrínyi Ilona Matematikaversenyek feladatai és megoldásai '91-93

Az 1993-as évben harmadszor került megrendezésre az egyre népszerűbb Zrínyi Ilona Matematikaverseny az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói számára. Növekvő népszerűségét jelzi, hogy legutóbb már több mint 35 000 tanuló vett részt a versenyen az ország minden részéből.

Magyarországon a matematikaversenyek nagy múlttal rendelkeznek, igen magas színvonalukkal világszerte ismertek és elismertek. A hagyományos versenyek néhány probléma szép megoldását, és annak világos, logikus indoklását várják. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny alapvetően eltér a megszokottaktól. Nem hat azonban ellenük. Alapvetően új benne, hogy viszonylag rövid idő alatt (60-90 perc) 20–30 feladatot kapnak a résztvevők.

Egy-egy feladatsor megoldása különös erőpróbát jelent a fiatalok számára. A feladatsorok első nehézségei a szöveg pontos olvasásában és tartalmának teljes megértésében jelentkeznek. A legkisebb felületesség, türelmetlenség, a lehetséges válaszok közül egy kipróbálása és jónak minősítése hibát is eredményezhet. A rendkívül sok igényes feladat hosszabb ideig tartó koncentrációt vár el, elmélyült figyelemre szoktat, nevel. Az iskolai, pedagógiai feladatok egyik legfontosabbika ez.

A feladatok a matematikai alapfogalmak mély, sokoldalú ismeretét, használatának igényes szintjét várják el. Gyorsan, pontosan haladni a megoldásokkal másképp nem lehetséges. A feladatsorok évfolyamokra szabottak. Messzemenően figyelembe veszik az országosan egységes iskolai követelményeket. Jellemzőjük, hogy az adott évfolyamra járó diákoktól elvárható igényes matematikai tudásra alapoznak. Bár a verseny ezen formája – választani kell öt válaszból egy helyeset, és csak egy helyes van – látszólag nem igényel bizonyítási ismereteket, valójában sok feladat gyors és hibátlan megoldása csak az általánosítás, az elméleti gondolkodás magasabb szintje esetén lehet eredményes. Így a bizonyítások módszereit, eljárásait ismerő fiatal eredményesebben oldhatja meg a feladatokat.

A feladatsorok korrektül építenek a diákok elvárható matematikai tudásszintjére. Jellemzőjük, hogy az életkori sajátosságokat jól ismerő pedagógusok a feladatokat fokozatosan nehezedő sorba rendezték. Ezzel együtt a figyelemkoncentráció lehetséges mértékét is tekintetbe vették. Minden feladatsorban egy-egy újabb probléma elemibb ismeretekkel gyorsan megoldható, így segíti a figyelemkoncentráció változását. Fontos, hogy a diák a bizonyosság megélésével átlendülhessen az esetleges holtpontokon, így kedvet kapjon az újabb akadály vállalásához, sikeres vételéhez.

E kötetben a *megoldások* és az egyes évek évfolyamonkénti tíz legjobb tanulójának *eredményei* is helyet kaptak.

Könyvajánlat

Csahóczi Erzsébet

TÖPRENGŐ III ., IV.
Tehetséggondozó matematikai feladatok 8-9, 9-10 éveseknek

A Töprengő c. feladatgyűjtemény fő célja a tanulók gondolkodásának fejlesztése változatos feladatsorokon keresztül. A feladatok tartalma, témája, nehézségi foka, megfogalmazása igazodik a korosztály életkori sajátosságaihoz.

A feladatok tematikus feldolgozása, a megoldások közlése módot ad a gyerekeknek az önálló feldolgozásra és önellenőrzésre. A tanítók is jól használhatják órákon és szakkörökön.

Megjelent ára: 198,- Ft

Bonifert Domonkos

Néhány tipikus problémaszituáció matematikából
Feladatok és megoldások érdeklődő diákoknak és tanároknak

Az olvasó olyan példatárat vehet a kezébe, amelyben a feladatok nem a megszokott témakörök, hanem megoldási eljárások szerinti csoportosításban találhatók. A fejezetcímek:

I. Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek
II. Bizonyítások
III. Szélsőérték-feladatok
IV. Van olyan? Számlálási technikák
V. Egyéb érdekességek

A kötet sajátossága, hogy ugyanazon probléma megoldását többféle módszerrel, más-más szintű megközelítésben, az ötletek sokaságának felhasználásával mutatja be. A feladatok tanulmányozása, feldolgozása tehetséges általános és középiskolai tanulók, valamint az őket tanító tanárok számára is hasznos lehet.

1. kiadás 359,- Ft

Hajnal Imre

Középiskolások kézikönyve
Matematikai fogalmak, tételek

A könyvben összefoglalva és rendszerezve található a középiskolai matematika elméleti tananyaga. Ezzel segítséget nyújt az érettségi vizsgára, főiskolai, egyetemi tanulmányokra készülőknek.

Ajánljuk ezt a könyvet mindazoknak, akik a matematikai fogalmak, definíciók, állítások, tételek közötti logikai rend alapos ismeretére és jól alkalmazható szilárd tudásra törekednek, olyanra, amely biztosíthatja a jó eredményű érettségi vagy a sikeres felvételi vizsgájukat.

2. kiadás 352,- Ft

A Töprengő III., IV. és a Matematikai fogalmak, tételek c. kiadványaink szerepelnek az 1994/95-ös tanév tankönyvjegyzékén

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

94. MÁRCIUS ára: 88,- Ft II. évf. / 2. szám

TARTALOM

GONDOLATOK A „FOGÓCSKÁRÓL"
Dr. Török Tamás
főiskolai tanár, Esztergom

INFINITEZIMÁLIS SZÁMÍTÁS - MÚLT? JÖVŐ?
Somogyi László
gimnáziumi tanár, Budapest

GRAFIKUS ZSEBSZÁMOLÓGÉP HASZNÁLATA A MATEMATIKAOKTATÁSBAN
Dr. Ambrus András
egyetemi adjunktus, ELTE, Budapest

AZ 1992/93. TANÉVI BELGIUMI (FLANDRIAI) MATEMATIKAI OLIMPIA ELSŐ FORDULÓJÁNAK FELADATAI
Urbán Eszter
egyetemi hallgató, Budapest

FELADATROVAT- TANÁROKNAK

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY IV. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY II. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSAI

TANKÖNYVSOROZAT MATEMATIKÁBÓL
Dr. Korányi Erzsébet
vezető tanár, Budapest

A XVII. század folyamán a matematika történetének egy új fejezete kezdődött. HUYGENS (1629-1695), LEIBNIZ (1646-1716), NEWTON (1643-1727) és számos kortársuk munkássága révén kialakult, majd EULER (1707-1783) nyomán nagyot fejlődött a matematikai ... *(8. oldal)*

Németország Sachsen-Anhalt tartományában 1991 őszén a Hallei Martin Luther Egyetem, a Magdeburgi Műszaki Egyetem és a Hallei Tanártovábbképző Intézet (LISA) néhány oktatójából, továbbá gimnáziumi matematikatanárokból megalakult egy kutatócsoport azzal a céllal, ... *(12. oldal)*

A folyamatosan átalakuló iskolarendszer megkívánja, hogy a tankönyvek írásával és kiadásával igyekezzünk követni az egyre markánsabban kibontakozó változásokat; a közoktatási törvény pedig ad annyi türelmi időt az átrendeződésre, hogy e munkával elébe mehessünk ... *(29. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 440 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos felvilágosítás: Tóth Mónika
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

GONDOLATOK A „FOGÓCSKÁRÓL"
Dr. Török Tamás
főiskolai tanár, Esztergom

INFINITEZIMÁLIS SZÁMÍTÁS - MÚLT? JÖVŐ?
Somogyi László
gimnáziumi tanár, Budapest

GRAFIKUS ZSEBSZÁMOLÓGÉP HASZNÁLATA A MATEMATIKAOKTATÁSBAN
Dr. Ambrus András
egyetemi adjunktus, ELTE, Budapest

AZ 1992/93. TANÉVI BELGIUMI (FLANDRIAI) MATEMATIKAI OLIMPIA ELSŐ FORDULÓJÁNAK FELADATAI
Urbán Eszter
egyetemi hallgató, Budapest

FELADATROVAT- TANÁROKNAK

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY IV. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY II. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSAI

TANKÖNYVSOROZAT MATEMATIKÁBÓL
Dr. Korányi Erzsébet
vezető tanár, Budapest

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Dr. Török Tamás

Gondolatok a „Fogócskáról"

Előzmények

A matematika tanítása 1993. évi 3., májusi számában jelent meg C. Neményi Eszter: „Gondolatok egy alsó tagozatos játék kapcsán" című írása, melyben egy rendkívül szellemes, elsősorban a nyitott mondatok témakörébe tartozó alsó tagozatos játékot ismertet: a „Fogócskát".

Alig vártam, hogy bemutathassam a főiskola másodéves hallgatóinak, mivel a játék érdekességén és egyszerűségén túl két szempontból is kapóra jött. Egyrészt éppen akkor tanítottam a polinomok – egyenletrendszerek – szabályjátékok – szöveges feladatok összetartozó problémaegyüttesét, másrészt ugyanazon a héten a hallgatók bemutatóórát láttak (4. osztályban) a gyakorló általános iskolában. Ezen egy összetett szöveges feladatot oldottak meg a gyerekek okoskodással és lebontogatással, ill. egy egybemenetű gép működési elvét határozták meg és írták fel nyitott mondatként.

Az előzményekhez tartozik, hogy a hallgatók már az első félévben megismerték (a logika témakörén belül) a tervszerű próbálgatást, mint a nyitott mondatok megoldásának egy lehetséges módszerét.

A felvezetés előtti utolsó, de fontos adalékként említeném, hogy korábban már foglalkoztunk olyan „adatismertetésekkel", amelyeket mi magunk tettünk feladattá azáltal, hogy – kellő elemzés után – megválaszolható kérdéseket fogalmaztunk meg, ill. az adatok megváltoztatásával vagy kibővítésével a kérdések körét is megváltoztathattuk vagy kibővíthettük.

A játék lefolyásáról

Pontosan azt tettem, amit az idézett cikk javasol; ugyanazt a konkrét feladatot szerepeltetve, de a játék nevét nem árultam el:

1. A kifejezéseket egy-egy papírcsíkra írtam.

2. Két önként jelentkező hallgatót kértem (Móni és Zoltán jelentkezett), akiket a csoporttal szembe ültettem, és a papírcsíkokat lefordítva eléjük tettem.

3. A táblára írtam:

4. A csoport többi hallgatójától azt kértem, hogy mondjanak egy számot (5), majd még egyet (8).

5. Móni és Zoltán megnézte kártyáit, kiszámította a kifejezések értékét, amit a számokkal együtt (a megfelelő oszlopokba) a táblára írtam.

5	4900	125
8	4840	140

6. Ezek után csak annyit mondtam: Tessék gondolkodni, értelmes kérdéseket feltenni!

7. A kezdeti néma csend után aktivizálódott a csoport, jöttek a kérdések, válaszok, javaslatok[1]:

- Mit jelölhet a ◊?
- Egy változót.
- Mi lehet a kártyákon?
- Egy kifejezés.

[1]A hallgatói észrevételektől megkülönböztetve, **E** betű áll azon kérdés, instrukció, megjegyzés után, amit én mondtam.

– Függ-e a kifejezések értéke a ◊ változótól? (E)
– Természetesen, hiszen akkor nem kerültek volna a táblára összetartozó számhármasokként. Na meg akkor mit számolt Móni és Zoltán?
– Megtudhatjuk-e, mi van a kártyákon?
– Nem!
– Talán!
– De igen, biztos! – mondta Klári.
– Hogyan? – kérdezte valaki.
– Ha feltételezzük a kifejezések linearitását...
– Miért feltételezhetjük? (E)
– Miért ne? Legfeljebb majd ellenőrízzük egy harmadik számmal. Szóval akkor Móni kártyája:

$$◊ \cdot a + b,$$

Zoltáné pedig

$$◊ \cdot c + d$$

– folytatta Klári. Akkor

$$5 \cdot a + b = 4900, \quad 5 \cdot c + d = 125,$$
$$8 \cdot a + b = 4840, \quad 8 \cdot c + d = 140.$$

Ebből

$$a = -20, \quad b = 5000, \quad c = 5, \quad d = 100.$$

Móni kártyája tehát

$$5000 - ◊ \cdot 20,$$

Zoltáné

$$100 + ◊ \cdot 5.$$

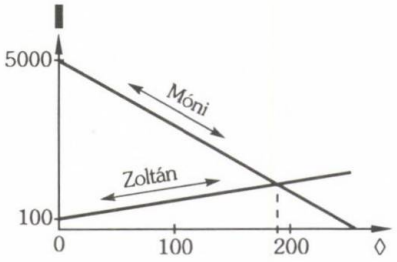
– Nagyszerű! Akkor most be is fejeztük?
– Nem, mert még nem ellenőriztük legalább egy harmadik számmal. (E).
– Jó, hát akkor nézzük meg pl. a 10-zel! Móni eredménye 4800, Zoltáné 150. Valóban:

$$5000 - 10 \cdot 20 = 4800,$$
$$100 + 10 \cdot 5 = 150.$$

Tehát minden rendben, a kártyákat megnézve is ezzel megegyező értékeket találtunk.
– Ezzel mindent megbeszéltünk, most már tényleg befejezhetjük.
– Nem! Ellenkezőleg! Most fogjuk csak elkezdeni! Csak nem gondolják, hogy a játékot ilyen formában taníthatják majd a gyerekeknek? Különben sem biztos, hogy a célunk a kártyák megismerése. Inkább egy játékról lesz szó. (E)
– Hát akkor mi a cél, mi a játék?

Egy kis kitérő

– Hogyan tudnánk grafikusan ábrázolni, amit eddig csináltunk? (E)
– Fölrajzoljuk a két kifejezésnek megfelelő egyeneseket.



– Mit csinál Móni és Zoltán az egyenesein? (E)
– Lépegetnek. Talán egymást keresik. Meg is találhatják egymást. Mindenesetre kétkét helyzetüket már ismerjük.
– Persze mi is kellünk a mozgatásukhoz.
– Mi lehet a játék neve? (E)
– „Irányított találkozás", a mi szempontunkból.
– Nem rossz! Mi lehetne még? (E)
– Bújócska! – mondta valaki. (Jó, hogy mondta, de erről majd később.)
– De hiszen nem bújt el senki.
– Fogócska, a játékosok szempontjából!
– Nagyszerű! Ez valóban nagyon találó elnevezés: A cél tehát a ◊ olyan értékét megtalálni, amire a két kifejezés egyenlő, vagyis Móni és Zoltán „sétájuk" (egymás keresése) közben találkoznak. (E)

Ez elméletileg nagyon egyszerű; adódik az

$$5000 - ◊ \cdot 20 = 100 + ◊ \cdot 5$$

nyitott mondat (egyenlet) megoldásával. Nyilván a ◊ = 196 teszi igazzá.

Beszéljünk most a játék alsó tagozatos tanításáról! – folytattam az órát. Ha a cél az, hogy a gyerekek kitalálják mi áll a kártyákon, akkor

a feladat nem különbözik a kétváltozós (egybemenetű) szabályjáték szokásos megoldásától, (ezt pedig már eleget gyakoroltuk, sőt láttuk a bemutatóórán is) csak a köntös más. De most nézzük meg még egyszer, miben segít az elméleti háttér!

Nem várható el minden gyerektől, hogy ilyen, viszonylag bonyolult működési (lépegetési) elveket" segítség nélkül kitaláljon, főleg ilyen magas számtartományokban. Még akkor sem, ha újabb és újabb értékeket helyettesítenek be. Hát ezért is hasznos amit csináltunk. A segítségnyújtáshoz, ami a következő lehet:

Vond ki 5000-ből a Móni kártyája alatti számokat és nézd meg, hogy a ◊ hányszorosát kaptad! Vagy a kártya alatti számokhoz add hozzá a ◊ 20-szorosát! Mennyi lett az eredmény?

$$5000 - \blacksquare = \Diamond \cdot 20, \quad \blacksquare + \Diamond \cdot 20 = 5000.$$

Vonj ki százat Zoltán kiszámított értékeiből: Vagy vedd el ezekből a ◊ 5-szörösét! Mit tapasztalsz?

$$\blacksquare - 100 = \Diamond \cdot 5, \quad \blacksquare - \Diamond \cdot 5 = 100.$$

Mi állhatott a kártyákon? A nyitott mondatok átalakítása (explicitté tétele) ■-re:

$$\blacksquare = 5000 - \Diamond \cdot 20, \quad \text{ill. } \blacksquare = 100 + \Diamond \cdot 5.$$

Ha viszont nem cél a kártyákon lévő kifejezések kitalálása, akkor a feladat gyönyörű lehetőséget kínál egy ráadásul **ismeretlen nyitott mondat** tervszerű próbálgatással való megoldásához. Megint kezdjük egy kis vizsgálódással!

A kifejezések már ismertek. Van két jól használható értékünk: az 5 és a 10. Ha a ◊ öttel nő, akkor Móni száma 100-zal csökken, Zoltáné viszont 25-tel növekszik. Mi lenne a kártyák értékváltozása a ◊ eggyel való növekedésénél? Nyilván Mónié 20-szal csökkenne, Zoltáné 5-tel növekedne.

Azt is látni kell, hogy ha két tetszőleges behelyettesítésnél a két kiszámított érték közötti reláció megfordul, akkor a kettő között érdemes már csak próbálkozni.[2]

E két utóbbi észrevétel feltétlenül szükséges a feladat alsó tagozatos megoldásának tanítói irányításához. Azt hiszem, bármelyik hiányában tervszerű próbálgatás helyett egy lassú, unalmas és hosszadalmas számolást igenylő véletlen rátalálás lehet csak az eredmény.

És most a cikkből idézve: „... a hallgatók igazán csak akkor fogják a játékot megszeretni, ha a saját tanítványaiknak szerezhetnek vele hasznos örömet." Egyetértve és folytatva C. Neményi Eszter gondolatait, ezt az örömöt viszont csak akkor érhetik el, ha a játék tanítására elméletileg is alaposan felkészültek, ami nagyban segíti őket abban, hogy segíthessenek.

Bújócska

A hallgatók játékelnevezései között szerepelt a bújócska, de ez nem illett az akkor ismertetett játékra. Viszont elgondolkodtatott. Hogyan lehetne a játékot – alapötletét meghagyva – bújócskára változtatni. Egy lehetőséget mutatnék most erre.

Egy gyerek (nevezzük Péternek) ül az osztállyal szemben, kezében zsebszámológép. Előtte két kártya fekszik. A bal oldalin egy lineáris kifejezés szerepel számokkal, műveleti jelekkel és (az egyszerűség kedvéért) egy x változóval.[3] A másikon, a jobboldalin egyetlen szám: Péter kifejezésének egy ismeretlen helyen vett helyettesítési értéke. A többiek nem láthatják egyik kártya tartalmát sem.

A helyükön ülők azt szeretnék megtudni, hogy hová búvt el Péter, azaz milyen x-re lesz a kifejezés értéke a jobboldali kártyával megegyező, vagyis az eltérés nulla.

Ebben a keresésben Péter csak annyit segít, hogy minden esetben megmondja az eltérést az ő száma és a kifejezés (a többiek által mondott helyen vett) értéke között. A táblán:

(0 - 50)	Péter kifejezése	Péter száma	Eltérés
x			

[2] Hasonló ez a numerikus gyökkereséseknél jól ismert felezéses eljáráshoz, vagy a húrmódszerhez

[3] Ez a kifejezés határozza meg azt az egyenest, amin elbújt a gyerek.

– 10 – mondja Éva. Péter kiszámítja a kifejezés értékét, majd ezt összehasonlítja a számával, és meghatározza az eltérést.
– 81 – mondja Péter.

A tanító felírja a táblára a két elhangzott számot a megfelelő helyre.

– 20 – javasolja az új számot Irén.
– 51 – válaszol Péter.

Táblára írás, további próbálkozások, megfigyelések, észrevételek.

10	81
20	51

– Érdekes, mintha az eltérés mindig 1-re végződne! Nézzük csak!

23	42

– Ez nem vált be! Az eltérés mindenesetre csökkent!
– Még nagyobb szám kell!

40	9

– Megint csökkent! Sokat! Már majdnem megtaláltuk!

41	12

– Hoppá: Hát ez hogy lehet?
– Ilyen nincs! Az eltérés eddig fokozatosan csökkent, most meg nőtt, pedig x csak 1-gyel lett nagyobb!

A gyerekek kifogytak az ötletekből. Most kellene a tanítói segítség!

Elméleti háttér

Jelölje $ax + b$ Péter kifejezését (baloldali kártyáját c a számát (jobboldali kártyáját), e pedig az eltérést. Mivel c egy x_0 helyen vett helyettesítési érték, ezért:

$$c = ax_0 + b \quad \text{és} \quad e = |ax + b - c|.$$

A feladat x_0 meghatározása. Átalakítva e-t:

$$e = |ax + b - (ax_0 + b)| = |a|\,|x - x_0|$$

Vegyünk két tetszőleges helyettesítést, pl. az első kettőt! Akkor

$$81 = |a|\,|10 - x_0|$$

és (*)

$$51 = |a|\,|20 - x_0|.$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva:

$$81/51 = 27/17 = |(10 - x_0)/(20 - x_0)|.$$

Ebből

$$(10 - x_0)/(20 - x_0) = \pm 27/17.$$

A két egyenletet megoldva csak az $x_0 = 37$ szolgáltat egész eredményt. Ezt behelyettesítve (*) bármelyik egyenletébe $|a| = 3$ adódik.

Ha $a = -3$, akkor $b - c = 111$, ha pedig $a = 3$, akkor $b - c = -111$. Péter kifejezésére ill. ezzel összefüggésben számkártyájára tehát „2-szer végtelen sok" megoldást találtunk, bár a feladat csak x_0 meghatározása volt![4]

Az eredményeink alapján mi a kapcsolat x és e között?

$$e = 3|x - 37|$$

amiből a lényeg, hogy

$$e/3 = |x - 37| = |37 - x|.$$

Főleg ezért volt érdemes egy kis elméleti kitérőt tenni, mert ez alapján már könnyű lesz segíteni!

Visszatérve az órai munkához:

– Mi ugye olyan számot keresünk, amire az eltérés nulla?
– Igen, de nem találjuk!
– Mit vesztek észre az eltérések oszlopában?
– Minden szám osztható hárommal:
– Hát akkor osszuk is el őket 3-mal!

10	27
20	17
23	14
40	3
41	4

[4] Ez a felismerés pedig egy újabb játéklehetőséget kínál: Az osztályt két csoportra bontjuk: akik elbújnak és akik keresik őket.

Mi a kapcsolat a két oszlop között? Ha nem ismerik fel az összefüggést, akkor a segítő kérdés a következő lehetne:

- Tudnátok olyan számot mondani, aminek az eltérése a baloldali oszlop számaitól a jobboldali oszlop számait adja?
- Igen, a 37!
- Megtaláltuk Pétert! – mondhatná egy gyerek.
- Miért? - kérdezhetné egy másik.
- Mert, ha a bal oldalra 37-et írunk, akkor a jobb oldalon 0 lesz, ami az eltérés harmada, de akkor ott az eredeti eltérés is 0 kell, hogy legyen!
- Most már értem! – nyugodhatna meg a kételkedő.

Ezután teszi fel a tanító a keretek helyére a kártyákat:

(0 - 50) 50	Péter kifejezése	Péter száma	Eltérés
	pl. $120 - 3x$	pl. 9	0

A gyerekek ellenőrizhetik is Péter számításait.

Hat lépés kellett, hogy megtalálják Pétert. Öt lépés után látszólag semmi további ötlet nem született, és azt hiszem, nem is születhetett volna, ha a tanító nem készül fel elméletileg is a játék tanítására.

A játékban nagyon kell vigyázni – legalábbis alsó tagozatban – (és ez áll a Fogócskára is), hogy (nagy) negatív számok lehetőleg ne jöhessenek ki, mert az ettől való eltérés kiszámítása még nehezebb.[5]

Indítékok

A cikk megírására az alábbiak inspiráltak: C. Neményi Eszter írásának csak az első fejezete (*A játék*) foglalkozik (egy oldal terjedelemben) a „Fogócskával". A játék elképzelésem szerinti lefolytatása a hallgatók körében sok olyan, számomra érdekes, meglepő, tanulságos élménnyel gazdagított és továbbgondolásra ösztönzött, amely talán mások érdeklődésére is számot tarthat. (Mindenesetre a játék érdekessége már önmagában is megér egy bővebb, részletesebb elemzést.)

Szerettem volna felhívni a figyelmet az elmélet, az átgondolás, a „körbejárás" fontosságára, amiből sok esetben szinte következik az a mód, ahogyan egy adott feladatot, témakört alsó tagozatban taníthatunk, problémás helyzetekben segíthetünk. Nem hiszem, hogy létezhet matematika tantárgypedagógia (ezen belül módszertan) elméleti háttér nélkül, és fordítva: nincs értelme olyan elméletet tanítani tanítóképző főiskolás hallgatóknak, amelyre még közvetve sem találunk alsó tagozatos alkalmazást.[6]

Végül remélem, hogy a cikk írása közben felbukkant „Bújócska" elnevezésű játékot is kipróbálásra alkalmasnak és érdemesnek találják.

[5] Ezt könnyű elérni, ha megadjuk a keresési számtartományt (alaphalmazt).

[6] Természetesen az alacsony óraszámot és azt a tényt figyelembe véve, hogy a matematika csak egy a tantárgyak között, amelyek tanítására egy hallgatónak fel kell készülnie.

* * *

A MOZAIK Oktatási Stúdió tankönyvajánlata

Bartók - Szebeniné - Péter Szabóné

Matematikai gyakorló munkafüzet 2-4. o.

A kiadvány célja, hogy az általános iskolák 2-3-4. osztályos tanulói minél hamarabb és minél könnyebben megszerezzék matematikai ismereteiket. Olyan munkáltató feladatlap, mely a nevelők, szülők segítségével, és önállóan is jól használható. A sok érdekes feladat lehetőséget ad az eddigi tudás felelevenítésére, bővítésére. A munkafüzet végén található felmérő lapok segítségével a tanulók tudásukat mérhetik le, és még játékos fejtörők is várnak az érdeklődőkre. Főleg azoknak nyújt segítséget, akiknek több gyakorlásra van szükség a tananyag elsajátításához.

Megjelent ára kötetenként: 198,- Ft

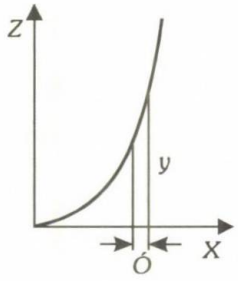
Somogyi László

Infinitezimális számítás - múlt? jövő? (Nem standard analízis)

A XVII. század folyamán a matematika történetének egy új fejezete kezdődött. HUYGENS (1629-1695), LEIBNIZ (1646-1716), NEWTON (1643-1727) és számos kortársuk munkássága révén kialakult, majd EULER (1707-1783) nyomán nagyot fejlődött a matematikai analízis, illetve ahogy kezdték nevezni: az infinitezimális számítás.

Az ekkor forradalmian új, bár nem minden előzmény nélküli módszerre álljon itt néhány példa.

NEWTON a „De Analysi per Aequationaes Numero Terminorum Infinitas" című, 1669-ben publikált művében a következő gondolatmenetet írja le.



1. ábra

Jelentse Z a görbe alatti területet (1. ábra), mely függését a vízszintes koordinátától a $Z = aX^m$ kifejezés írja le. Növeljük X értékét a végtelenül kicsi $Ó$ mennyiséggel. Ekkor a terület $ÓY$ mennyiséggel fog növekedni. Így tehát az új területre igaz lesz:

$$Z + ÓY = a(X + Ó)^m$$

A jobb oldali kifejezést, az amúgy szintén NEWTON nevéhez fűződő, binomiális tétel segítségével átalakítva az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$Z + ÓY = aX^m + ÓamX^{m-1} + \\ + Ó^2\frac{am(m-1)}{2}X^{m-2} + \ldots + aÓ^m$$

Kivonva mindkét oldalból $Z = aX^m$-et, majd osztva $Ó$-val, a következő összefüggés adódik:

$$Y = amX^{m-1} + Ó\frac{am(m-1)}{2}X^{m-2} + \ldots + Ó^{m-1}a$$

Mivel $Ó$ végtelenül kicsi, ezért minden tag, melyet $Ó$-val illetve valamely hatványával szoroztunk, elhanyagolható:

$$Y = amX^{m-1}$$

NEWTON ennek a gondolatmenetnek az eredményeképpen kapta meg a $Z = aX^m$ függvény deriváltját. (Forrás: Simonyi: A fizika kultúrtörténete, Gondolat, 1981. 244. old.)

További példák EULER „Opera omnia, Introductio in Analysin Infinitorum" című művéből valók, mely 1748-ban Lausanne-ban jelent meg.

A cosinus függvény sorbafejtéséhez a Moivre formulából indul ki:

$$\cos nz = \frac{1}{2}((\cos z + i\sin z)^n + (\cos z - i\sin z)^n) = \\ = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z\cdot\sin^2 z + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z\sin^4 z - \ldots$$

Ha z végtelenül kicsi, akkor $\cos z = 1$ és $\sin z = z$; ha n végtelenül nagy, de az $n \cdot z = v$ véges, akkor:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

adódik, mely a cos v jól ismert sorbafejtése.

Más helyen ugyancsak EULER írja:

$$e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i = 1+\frac{x}{i}\cdot i+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{i^2}+\ldots =$$
$$= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

i jelentése itt: végtelenül nagy szám. Ezekre a végtelenül nagy számokra ad is néhány használati utasítást. Pl:

$$\frac{i-1}{i}=1 \qquad \frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3} \quad \text{stb.}$$

A kapott eredmények ma is megállják a helyüket, a használt módszerek azonban kezdettől fogva viták kereszttüzében álltak. Eleinte a matematikusok erőfeszítése e módszerek pontos megalapozására irányult. Majd e kísérletek sorozatos kudarca után mindinkább előtérbe került az analízis olyan megalapozása, amely elkerüli a végtelenül kicsi illetve a végtelenül nagy mennyiségek használatát. A hosszú vajúdás, viták eredményeképpen CAUCHY (1789-1857), WEIERSTRASS (1815-1897), BOLZANO (1781-1848) és sok más kiváló matematikus munkássága nyomán kialakult a mai függvényfogalom, s az infinitézimális számítást elkerülő, biztos alapokon nyugvó határértékelmélet, amely a klasszikus analízis alapjává vált.

Tulajdonképpen ezzel véglegesen lezárulhatott volna az infinitezimális számítás korszaka a matematikában. További fennmaradása talán annak köszönhető, hogy a természettudományokban – különösen a fizikában – olyan egyszerűbb számításokat tesz lehetővé, amely elkerüli a „kemény" matematikai apparátus használatát.

Az így kapott eredményeket persze „korrekt" matematikai eszközökkel is igazolni kell, de ez már a matematikusok dolga. Így talán érthetővé válik az a meg-megújuló próbálkozás, hogy biztos alapokra helyezzék az infinitezimális számítást.

1966-ban megjelent Abraham ROBINSON „Non-Standard Analysis" című könyve, amely e próbálkozások első sikeres alkotásaként útjára indította a nem standard analízis mozgalmat, és amely az infinitezimális számítás rehabilitásáért szállt síkra.

A mozgalom fejlődésében és népszerűsödésében fontos időpont 1977, amikor megjelent Edward NELSON „Internal Set Theory, a new approach to Non Standard Analysis" című cikke az Egyesült Államok Matematikai Társulatának lapjában (1.). E programadó cikkben NELSON kiegészíti 3 újabb axiómával a klasszikus matematika axiomatikus megalapozását szolgáló ún. Zermelo-Frenkel féle axiómarendszert. Bevezet egy új „jelzőt" (standard), s ettől kezdve minden matematikai objektum vagy standard, vagy nem standard. A három új axióma rögzíti azt, hogyan lehet eldönteni pl. egyes halmazokról, hogy melyik jelző illeti őket. A klasszikus, tehát a Nem Standard Analízis (NSA) előtti fogalmak mindegyike standard, minden klasszikus tétel továbbra is érvényes az NSA keretében.

Az egyik új axióma következménye, hogy van olyan valós szám, amely minden standard pozitív egésznél nagyobb. Ez a szám – nevezzük el ω-nak – végtelenül nagy kell legyen. Természetesen $\omega - 1$, $\omega + 1$, 2ω, 3ω, ω^2, ω^ω is végtelenül nagy.

Ugyanakkor $\frac{1}{\omega}$ minden pozitív egész reciprokánál kisebb pozitív szám, tehát végtelenül kicsi.

Így eljutunk a „klasszikus" valós számok egy olyan bővítéséhez, amelyben a régi számok mellett jelen vannak a végtelenül nagy, a végtelenül kicsi számok, valamint minden standard valós szám „holdudvarába" tartozó, tőle végtelenül kicsi számban különböző valós számok.

Az NSA NELSON féle megalapozásának előnye, hogy a „régi" axiómákat meghagyja. Ezért mindaz, ami a „klasszikus" matematikában érvényes volt, továbbra is érvényben marad. Például a természetes számok definíciója ugyanaz a hagyományos felfogást valló és az NSA-t elfogadó matematikusnál. Az utóbbi számára azonban a természetes számok halmazának „több" eleme van. A többlet lehetővé teszi „klasszikus" problémák lényegesen egy-

szerűbb megoldását, vagy például ismert fogalmak egyszerűbb definiálását.

Az NSA valós szám felfogásával szemben talán a leggyakrabban elhangzó ellenvetések egyike, hogy e számok nem „hozzáférhetőek". Mi például egy végtelenül nagy egésznek a tízesek helyén álló számjegye? Ilyen típusú probléma azonban már az irracionális számoknál is felmerülhet. Sőt, a π századik tizedesjegyét nehezebb megmondani, mint egy végtelenül kicsi ε-ét. (Ez utóbbi századik tizedesjegye: 0.)

Ugyancsak sok kérdés vetődik fel azzal kapcsolatban is, hogy a valóság leírására mennyiben alkalmas az NSA természetes szám felfogása. A „klasszikus" egész számok és a végtelenül nagy egész számok között nem lehet éles határt vonni. Nem tudjuk megmondani, hogy meddig tartanak a „klasszikus" egészek, és hol kezdődnek a végtelenül nagyok. (Bármely „klasszikus" n-re $n + 1$ is az, bármely végtelenül nagy ω-ra $\omega - 1$ is az!) E jelenségek leírására hozták P. VOPENKA és A. SOCHOR cseh matematikusok a következő hasonlatot. Darwin tanítása szerint az ember a majomtól származik. Minden majom gyermeke majom, minden ember szülője ember. Mégis véges sok generáció alatt a majomból ember lett. Ha úgy képzeljük, hogy a generációk száma végtelenül nagy egész szám, az első paradox helyzet feloldható.

Folytatásképpen álljon itt a 3 új axióma hétköznapi nyelven megfogalmazva.

Idealizáció: Minden végtelen halmaznak van nem standard eleme.

Standardizáció: Standard elemek adott összessége egyértelműen meghatároz egy standard halmazt (tehát azt is, mely nem standard elemek tartoznak bele).

Traszfer: Ha minden x-re bizonyítani akarunk egy klasszikus tulajdonságot, akkor elegendő, hogy igaz legyen minden standard x-re.

Az újra felfedezett, és biztos alapokra helyezett infinitézimális számításnak jelentős szerepe lehet a matematika tanításában. Ezzel kapcsolatban több széleskörű kísérlet folyik külföldön. Középiskolai szinten megkönnyítheti az analízis tanítását az NSA egyes fogalmainak bevezetése. Természetesen nagyon bonyolult lenne az axiomatikus felépítés, de ezt a többi témakörnél is elkerüljük. Az infinitezimális számítás kiindulópontja néhány, az új axiómák segítségével bizonyítható egyszerűbb állítás lehetne. Például:

A1: $\mathbb{N}$-nek van végtelenül nagy eleme.

A2: Ha x nem végtelenül nagy és $0 < y < x$, akkor y sem végtelenül nagy.

A3: Ha x és y nem végtelenül nagy, akkor $x + y$ és xy sem végtelenül nagy.

A4: A „jól definiált" természetes számok nem végtelenül nagyok.

Megállapodásként „jól definiált" (klasszikus, standard) fogalomnak tekintjük azokat, amelyek a végtelenül nagy, a végtelenül kicsi, illetve ezek következményei nélkül definiálhatók. „Jól definiált" például: 0, π, $10^{1000000}$, az előző szám reciproka, az $f(x) = 5x^2$ függvény stb. Nem „jól definiált" (a „klasszikus" matematikai értelemben!) például: ω, $5\omega^2$, 2^{ω}, az $f(x) = \omega \cdot x + 3$ függvény végtelenül nagy ω esetén.

További elnevezések:

Egy ε valós szám végtelenül kicsi, ha $\varepsilon = 0$ vagy $\frac{1}{\varepsilon}$ végtelenül nagy.

Egy a valós szám mérhető, ha nem végtelenül kicsi és nem végtelenül nagy.

Az a és b számok szomszédosak, ha $|a - b|$ végtelenül kicsi. Jele: $a \simeq b$.

Az A1–A4-ből közvetlenül adódik néhány fontos műveleti tulajdonság. Könnyen belátható, hogy ha egy pozitív x végtelenül nagy, akkor $y > x$ esetén y is végtelenül nagy (ha nem így lenne, A2-vel kerülnénk ellentmondásba). Valamint ha a pozitív x végtelenül kicsi, akkor $0 \leqq y < x$ esetén y is az. Továbbá tetszőleges végtelenül kicsi ε, mérhető m és végtelenül nagy ω valós számokra:

$$0 \leqq |\varepsilon| < |m| < |\omega|$$

teljesül.

A számegyenes tehát a következőképpen írható le:

2. ábra

A pozitív valós számok halmazán az összeadás és szorzás műveleti szabálya így foglalható össze:

+	K	M	N
K	K	M	N
M	M	M	N
N	N	N	N

·	K	M	N
K	K	K	?
M	K	M	N
N	?	N	N

K: végtelenül kicsi; M: mérhető; N: végtelenül nagy; ?: további információ szükséges eldöntéséhez

3. ábra

Álljon itt annak bizonyítása, hogy ha x és y végtelenül kicsi, akkor összegük és szorzatuk is az.

A feltétel értelmében van olyan végtelenül nagy n, melyre $|x| \leqq \frac{1}{2n}$ és $|y| \leqq \frac{1}{2n}$. Ekkor $|x+y| \leqq |x|+|y| \leqq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$, tehát $x+y$ végtelenül kicsi.

Másrészt pl. x végtelenül kicsi, így $|x|<1$, tehát $|xy|<|y|$ vagyis xy is végtelenül kicsi.

A táblázat többi állításának bizonyítása sem bonyolultabb az előző kettőnél.

Néhány további, egyszerűen bizonyítható állítás:

1. Ha x végtelenül nagy, akkor x^k is az $(k \in \mathbb{N})$.
2. Ha a nem végtelenül nagy x, y, a és b valós számokra teljesül, hogy $x \approx a$ és $y \approx b$, akkor:
   i) $x + y \approx a + b$;
   ii) $x - y \approx a - b$;
   iii) $\sqrt{x} \approx \sqrt{a}$; $(x, a \geqq 0)$
   iv) $x^n \approx a^n$;
   v) $xy \approx ab$.
3. Ha az a és x mérhető számokra $x \approx a$, akkor $\frac{1}{x} \approx \frac{1}{a}$.

A cikk elején idézett klasszikus példákat az előzőek alapján a következő módon „pontosíthatjuk".

$$Y = amX^{m-1} + Ó\frac{am(m-1)}{2}X^{m-2} + \ldots + Ó^{m-1}a$$

ahol $Ó \approx 0$, tehát minden $Ó$-t szorzótényezőként tartalmazó tag $\approx Ó$. (Végtelenül kicsi szorozva mérhetővel = végtelenül kicsi, lásd a műveleti táblázatot.) Következésképpen $Y \approx amX^{m-1}$.

Az EULER által adott számítási módra a következő átírás adódik:

$$\frac{1-i}{i} = 1 - \frac{1}{i} \approx 1 \qquad \frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3i} \approx \frac{2}{3}$$

végtelenül nagy i-re.

Az eddig ismertetett számolási szabályok elegendőek ahhoz, hogy segítségükkel megfogalmazzunk és egyszerűen megoldjunk határértékszámítási feladatokat. Például:

$\lim a_n = ?$ ha $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$ kérdés helyett megvizsgálhatjuk, hogy az $\frac{x+1}{2x+3}$ kifejezés melyik „jól definiált" valós szám szomszédja, ha x végtelenül nagy.

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2+\frac{3}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$ az első tört az $\frac{1}{2}$ szomszédja, a második végtelenül kicsi, tehát $\frac{x+1}{2x+3} \approx \frac{1}{2}$.

Másik példa:

a $\lim_{x \mapsto 1+0} f(x) = ?$, ha $f(x) = \dfrac{x-1+2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

kérdés helyett vizsgáljuk meg, $f(x)$ milyen jól definiált számmal szomszédos, ha $x \approx 1$ $(x > 1)$.

A kifejezés átírható $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 2$ alakra.

$x - 1 \approx 0$, $x + 1 \approx 2$, tehát a gyökös kifejezés végtelenül kicsi. Így $f(x) \approx 2$ adódik, $x \approx 1$-re.

A nem standard analízis eszközeivel megalapozott infinitezimális számítás fogalmai közelebb állnak a heurisztikus gondolkodásmódhoz, ezért szerepük lehet az oktatásban. Segítségükkel közelebb lehetne vinni az analízisbeli gondolatokat olyanokhoz is, akik jelenleg idegenkedéssel fogadják az „ε – δ"-ás, sokszor természetellenesnek tűnő definíciókat, bizonyításokat.

Irodalom

[1] E. NELSON: Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis (Bull. of the Amer. Math. Society 83/6 (1977))

[2] R. LUTZ – M. GOZE: Non-Standard Analysis (springer lect. N. in Math. 881 (1981))

[3] F. DIENER – M. DIENER: Les bases theoriques de l'analyse non-standard (La Recherche No. 206 - 1989)

[4] R. LUTZ – A. MAKHLOUF: Les bases theoriques sur lesquelles l'enseignement de l'analyse au lycée pourrait être fondée (Tanártovábbképzés segédanyaga – Université Haut-Alsace 1993.)

Ambrus András

Grafikus zsebszámológép használata a matematikaoktatásban

Beszámoló egy iskolai kísérletről

Németország Sachsen-Anhalt tartományában 1991 őszén a Hallei Martin Luther Egyetem, a Magdeburgi Műszaki Egyetem és a Hallei Tanártovábbképző Intézet (LISA) néhány oktatójából, továbbá gimnáziumi matematikatanárokból megalakult egy kutatócsoport azzal a céllal, hogy konkrét gyakorlati lépést tegyenek a computer matematikaoktatásban való hatékony felhasználásának irányába. A négyéves iskolai kísérlet fő célja: a grafikus zsebszámológép (TI-81) integrálása a gimnáziumi felső osztályok (9-12 osztály, életkor 14-18 év) matematikaoktatásába. A computer felhasználása az iskolai matematikaoktatásban mind tartalmi, mind szervezési vonatkozásban igen igényes feladat. Ehhez jön, hogy sok még a bizonytalanság a computer iskolai alkamazásait illetően, aminek egyenes következménye a tanárok jelentős részének idegenkedése, félelme. A zsebszámológépekkel szemben nem annyira drasztikus a tanárok ellenkezése. A kísérlet egyik konrét célja empirikus kutatások végzése a zsebszámológép matematikaoktatásban való felhasználásának lehetőségeiről, természetes, iskolai körülmények között.

Kiindulási pozíciók

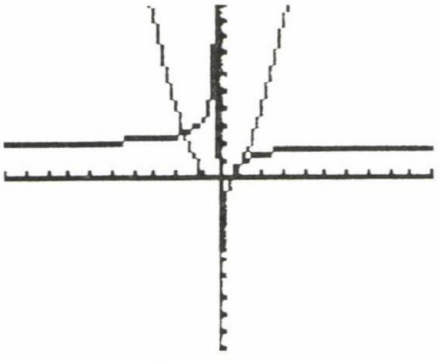
1. A zsebszámológép lényegében egy táskacomputer. A technikai fejlesztések gyors teljesítőképesség növelést biztosítanak. Nagy előny, hogy mint munkaeszköz minden tanuló rendelkezésére áll állandóan. Használatát rövid idő alatt megtanulják a tanulók. A gép ára

egyelőre még lényegesen kedvezőbb, mint a computereké.

2. A jelenlegi tantervi keretek között is jól használható. Olyan célok, mint a problémamegoldó képesség, a nyelvi-logikai képességek fejlesztése továbbra is centrális szerepet kapnak, sőt a kísérlet hipotézisei között az egyik leglényegesebb: a grafikus zsebszámológép használata mentesíti a tanulókat sok időigényes, mechanikus feladat konkrét elvégzése alól, s az így fennmaradó időben több lehetőség nyílik valódi, matematikai problémák megoldására. Bizonyos súlyponteltolódás természetesen bekövetkezik a grafikus zsebszámológép alkalmazásával. A függvények tanításakor értéktáblázatok készítése, függvények hagyományos ábrázolása, elvesztik korábbi domináns szerepüket, jelentőségüket. A fogalmak világos kialakítására természetesen szükség van. A kísérlet egyik célja éppen annak a vizsgálata, hogy például az előbb említett tevékenységeket milyen mértékben lehet háttérbe szorítani a hatékony fogalomalkotás sérelme nélkül.

3. A kísérlet egyik nagy munkaterülete konkrét oktatási segédletek elkészítése tanulók illetve tanárok számára. (Egyes témák feldolgozása, feldatlapok, mérőlapok összeállítása, módszertani javaslatok)

4. Az előbbiekben említett anyagok mindegyikének kidolgozásában a kísérletbe bekapcsolt tanárok aktívan részt vesznek. Így kikerülhetők az egyoldalú elméleti megközelítések, a gyakorlati realizálhatóság szempontja dominál. Ily módon tanárok a matematikadidaktika elméletét is gazdagítják.



1. ábra

5. A grafikus zsebszámológép felhasználásának súlypontjai a matematikaoktatásban:

- számolási segédeszköz
- „egyszerűsítő" (trivializáló) funkció.

Lehetővé válik pl. olyan egyenletrendszerek közelítő megoldása, amilyenek eddig nem szerepelhettek a tananyagban

$$y + \frac{1}{x} = 2,$$

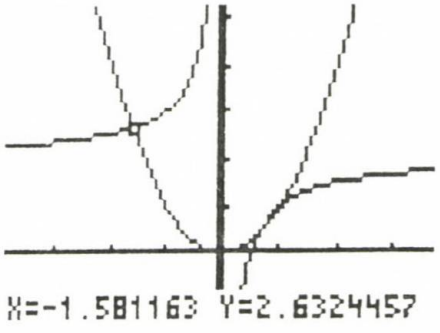
$$y - x^2 = 0.$$

A megfelelő függvények ábrázolása révén leolvasható a gyökök száma, továbbá a TRACE és ZOOM funkciók segítségével a közelítő gyökök is meghatározhatók. (1. és 2. ábra)

- tanulói kísérletezések, próbálkozások, felfedezések. Példa: milyen hatással van az a paraméter a következő függvény grafikonjára

$$f : x \mapsto \frac{2}{x+a};$$

- adatok tárolása, adatok kiértékelése, valószínűségi kísérletek szimulálása, (pl. kockadobás)
- programozás.



2. ábra

A kísérlet konkrét adatai

Az 1991/92-es tanévben négy gimnáziumi 9. osztályban kezdődött meg a kísérlet. A következő tanévben két gimnáziumi 11. osztályban azanalízis témakört dolgozták fel a

grafikus zsebszámológép segítségével, továbbá két újabb 9. osztály kapcsolódott be, de ők már a továbbfejlesztett TI-85-ös változatot használják.

Az 1992/93-as tanévben egy budapesti és egy prágai gimnáziumi I. osztály (négyéves gimnázium) is bekapcsolódott a kísérletbe. Magyar részről az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola II. B osztályának angol-német fakultációs csoportja vesz részt a kutatómunkában. A csoportban én tanítom a matematikát. A csoport létszáma 18 fő. Itt jegyzem meg, hogy a német kísérleti osztályok is főleg humanisztikus irányultságúak.

A TEXAS Instruments cég harminc darab grafikus zsebszámológépet ingyenesen bitosított. A fennmaradó gépeket az ELTE matematika tanárszakos hallgatóinak módszertani képzésében használjuk fel.

Tartalmi kérdések

A következő témákat vettük át a zsebszámológép segítségével.

1. Változók. Algebrai kifejezések átalakítása. Hatványok. Kifejezések számértékének meghatározása. Memória kezelése, konstantautomatika. Egyszerű programok írása. (Pl. gömb térfogatának meghatározása)

2. Lineáris függvények, egyenletek, egyenletrendszerek. Nem lineáris egyenletek közelítő megoldása. Pl. $5x = 4^x$ rendszereres próbálkozások segítségével, grafikusan (a grafikus megoldás itt nem csak szemléltetést, megértést elősegítő eljárás, hanem önálló megoldási módszer).

Függvények ábrázolása, vizsgálata. Program írása az elsőfokú egyenletrendszerek megoldására. Egyenletrendszerek megoldása program segítségével.

3. Másodfokú függvények és egyenletek. Másodfokú függvények ábrázolása. Másodfokú egyenletek grafikus megoldása. Paraméterek hatásának vizsgálata a másodfokú függvény grafikjonjára. Program írása a másodfokú egyenletek megoldására. Másodfokú egyenletek megoldása program segítségével.

Nagy hangsúlyt fektettünk az elsőfokú egyenletrendszer illetve másodfokú egyenletek megoldási eljárásainak a gép nélküli elsajátítására. Az első órákon nem használhatták a tanulók gépüket. A későbbiekben is igyekeztünk a feladatok kitűzési módjával a többféle megoldási eljárás gyakoroltatására.

Néhány jellemző feladat:

a) Határozd meg az $f: f(x) = x^2 - 3x - 2$ függvény zérushelyeit hagyományos módon, számolással, számológép használata nélkül (megoldóképlet alkalmazása, szorzattá alakítás)!

b) Határozd meg az f függvény zérushelyeit grafikus úton a gép segítségével. (Pontossági kérdések)

c) A másodfokú egyenletek megoldására írt program segítségével határozd meg az f függvény zérushelyeit!

Néhány eddigi tapasztalat

1. A kísérlet elején nagy volt a lelkesedés a tanulók között. A segédkönyv alapján sok feladatot már az első napokon kiokoskodtak (ellipszis rajzolása). Érdekes módon a legtöbben a DRAW menüvel próbálkoztak, az tetszett a legjobban nekik. Jó magyar szokás szerint mindjárt valami nagy dolgot akartak megvalósítani, megtanulni. Mikor fogunk a mátrixokkal foglalkozni? stb. kérdésekkel fordultak hozzám. Az apró, részletes alaptechnikai ismeretek elsajátítása nem volt érdekes számukra. Fokozatosan elmúlt a kezdeti eufória, a grafikus zsebszámológép egy normális munkaeszközzé vált. A nemzetközi tapasztalatok hasonlók.

2. Az év végi tanulói kérdőívek tanulsága alapján a grafikus lehetőségek kihasználása tetszett a legjobban. Örvendetes módon többen jegyezték meg, hogy a hagyományos megoldásukat számos alkalommal ellenőrízték a gép segítségével. Motivációs problémák nem voltak, ha esetenként nem volt szabad gépet használni

függvények ábrázolásakor, zokszó nélkül végezték a feladatukat a tanulók. A függvénytani alapfogalmak elsajátítását jól szolgálták a következő típusú feladatok. Ábrázolja az $f(x) = 10x + 1200$ függvényt! Mechanikus eljárás esetén csak a koordinátarendszert mutatja a gép, a grafikonból semmi sem látszik. A tanulóknak meg kellett keresniük a megfelelő intervallumokat a RANGE funkció segítségével. Ilyen típusú gyakorlatok hozzájárultak az értelmezési tartomány, értékkészlet és a függvény menete fogalmak elsajátításához. A zérushely fogalmának elsajátítását is jól szolgálta az egyenletek közelítő megoldása. A cursort a grafikonon mozgatva a gép minden esetben jelzi az összetartozó értékeket. A tanulók látják, tapasztalják, hogyan közelítünk ahhoz az x értékhez, amelyhez tartozó függvényérték 0. Sok gyakorlatot végeztek a tanulók szélsőértékekkel kapcsolatban is. Természetesen vetődik fel a géptől való függés kérdése. Több tanuló főleg eleinte „vakon" hisz a gépnek. Itt most csak az ábrázolást érintjük. A képfelbontás meglehetősen durva. Mégis sok tanuló a grafikon alapján kategórikus ítéleteket alkot az első pillanatban. Például az

$$f\colon f(x) = \frac{2 - 3x^2}{3x - 40}$$

függvény grafikonján a gép alapján csak az ötödik nagyítás után lehet látni, hogy az $x = 0$ hely környezetében egy lokális maximum és egy lokális minimum is létezik. A megelőző ábrázolások szerint szigorúan monoton növekedő a függvény a 0 hely közelében. Ilyen példák alapján a tanulók óvatosabbak lesznek a géppel kapcsolatban.

3. Számolás közelítő értékekkel.

A zsebszámológép használata lehetővé teszi a realisztikus – igen nagy, illetve igen kicsi – adatokkal való számolásokat. Sok tanuló számára megtévesztő, hogy a gép nyolc tizedesjegyre adja meg az eredményeket. Több tanulóm hónapokig lényegesen több tizedesjegy pontossággal adta meg az eredményeit, mint az az adatok alapján értelmes. Az értelmes pontosság érzete csak lassan, sok gyakorlás révén alakul ki. A becslés, közelítő értékekkel való számolás, pontosság kérdésében sajnos a nemzetközi szakirodalomban sincs egység. A probléma nemzetközi jellegét bemutatandó, két kérdést említek.

a) A közelítő értékekkel való számolás, eredmények becslése, nagyságrend megállapítása terén mutatkozó problémákat jelzi a következő eredmény. Egy Dortmund környéki felmérés során 4309 tanulót kérdeztek meg a 10. osztály végén. Három számolási feladat végeredményében kellett a hiányzó tizedesvesszőt a megfelelő helyre elhelyezni.

$12{,}32 + 5{,}6 \cdot 7{,}3 = 5320$
$123{,}6 \cdot 9876{,}50 = 12207354400$
$224 : 0{,}16 = 1400$

Mindhárom feladatot a Hauptschuléba járó tanulók 1,6 %-a, a Reálschuléba járó tanulók 3,7 %-a és a gimnáziumi tanulók 6 %-a oldotta meg helyesen. Egyetlen feladatot sem oldott meg helyesen az előbbi sorrendben a megfelelő tanulók 37, illetve 28-28 %-a. (Természetesen semmiféle segédeszközt nem lehetett használni, és írásban sem volt szabad elvégezni a feladatokat.)

b) A pontosság kérdése.

Humnenberger bécsi matematikadidaktikus doktori disszertációjában elemzi a következő adatot. „Egy tanuló a 60 méteres távot 9,4 sec alatt futotta végig." A 9,4 „tizedes pontosságú" adat. Kétféle felfogás van az „egytizedes pontosság" értelmezésére.

I. $\Delta t = 0{,}1$ sec, azaz $9{,}3 \text{ sec} \leqq t \leqq 9{,}5 \text{ sec}$

II. Egy tizedes jegyre való kerekítésről van szó, azaz $\Delta t = 0{,}05$ sec $9{,}35 \text{ sec} \leqq t \leqq 9{,}45 \text{ sec}$

Sok tanuló a tizedes pontosságot úgy értelmezi, hogy az eredeti számban az első tizedesjegy után álló számokat töröljük. Mindhárom megközelítési mód értelmes! A gyakorlatban viszont e háromféle értelmezést világosan el kell különíteni egymástól a nyelvi megjelenítés formájában is.

c) A „megbízható" jegy értelmezése sem egységes. Az egyik megközelítés szerint egy közelítő érték bizonyos jegye megbízható, ha a közelítő érték hibája legfőljebb az adott helynek megfelelő egy egység. Más felfogás szerint akkor megbízható egy jegy, ha a hiba legfőljebb egy fél egységnyi. A fenti problémák is jelzik, hogy jó lenne a magyar tankönyvekben is jelezni e problémákat, és megfelelő példákon keresztül bemutatni a tanulók számára a megoldásokat.

4. Programozás. A grafikus zsebszámológép programnyelve BASIC elemekre épül. A tanulók egy egyszerű programnyelv segítségével elsajátíthatják az alapvető programszerkesztési lépéseket. (elágazások, ciklus stb.) Egybecsengő tapasztalat, hogy a tanulók többsége nem szívesen készít bonyolultabb szerkezetű programokat. Érdekes, hogy a meglátogatott német osztályban nem minden tanuló tárolja pl. a másodfokú egyenlet megoldására írt programot. (A tanár nem kötelezi őket erre.) A magyar tanulók mindegyike tárolja és használja is a programokat. Önállóan csak 2 tanuló írt az osztályomban a másodfokú egyenletek megoldására programot. Az elsőfokú egyenletrendszerek megoldására senki sem írt programot önállóan. Nemzetközi tapasztalat: a tömegoktatásban célszerű kész programokat alkalmazni.

5. A grafikus zsebszámológép használata gyakran hozza döntéshelyzetbe a tanulókat. Egy-egy probléma megoldásánál különböző megoldási módszerek közül választhatnak: szisztematikus próbálkozás, grafikus megoldás, megoldóprogramok használata, hagyományos megoldás, gép használata nélkül. A legcélszerűbb megoldási módszer kiválasztása sok tanulónak okoz nehézséget. Egy példa: az egyenletrendszerek tanítása után közvetlenül írtuk meg az év végi zárótesztet. A feladatok között szerepelt a következő egyenletrendszer:

$$y + \frac{1}{x} = 0,$$
$$y - x^2 = 0.$$

A legtöbben a tanult behelyettesítő módszer segítségével akarták megoldani a feladatot, ami nem sikerült. Csak egy tanuló jött rá, hogy a grafikus zsebszámológép segítségével grafikus úton megoldható a feladat. Hat tanuló próbálkozások segítségével megtalált egy megoldást a lehetséges 3 közül. Egyenletek grafikus megoldása korábban szerepelt, sajnos a legtöbb tanulónak nem jutott eszébe. A Németországban meglátogatott osztályban hasonlóan sok tanulónak okozott nehézséget a legcélszerűbb módszer kiválasztása. Több tanuló használt például olyan esetben is gépet, amikor fejből pillanatok alatt le lehetett olvasni a megoldást. Sok megfelelő feladat megoldatása, a lehetséges megoldások megvitatása, az előnyök, hátrányok tudatosítása szükséges a hatékonyabb stratégia kiválasztásához.

Végezetül szeretném hangsúlyozni, hogy a grafikus zsebszámológép nem versenyez a computerrel. Felhasználási lehetőségei elősegítik a computerrel való megismerkedést, kész programok használatát, a programozásba való bevezetést. A gép Magyarországon is beszerezhető, egy év tapasztalatai alapján melegen ajánlom használatát.

* * *

A MOZAIK Oktatási Stúdió tankönyvajánlata

Csahóczi Erzsébet

TÖPRENGŐ III - IV.

Gondolkodtató matematikai feladatok 8-9, 9-10 éveseknek

A Töprengő c. feladatgyűjtemény a matematika iránt érdeklődő 8-9, illetve 9-10 éves gyerekek számára készült. Fő célja a tanulók gondolkodásának fejlesztése változatos feladatsorokon keresztül. A feladatok tartalma, témája, nehézségi foka, megfogalmazása igazodik a korosztály életkori sajátosságaihoz.

A feladatok tematikus feldolgozása, a megoldások közlése módot ad a gyerekeknek az önálló feldolgozásra és önellenőrzésre. A tanítók is jól használhatják órákon és szakkörökön.

Megjelent ára kötetenként: 198,- Ft

Az 1992-93. tanévi belgiumi (flandriai) matematikai olimpia első fordulójának feladatai (fordította: Urbán Eszter)

1. Tudjuk, hogy $a > 0$, akkor $\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{a}$ egyenlő

(A) $\sqrt{a}$ (B) $\sqrt[9]{a}$ (C) $\sqrt[12]{a}$ (D) $\sqrt[9]{a^2}$ (E) $\sqrt[18]{a^2}$

2. Hány állítás igaz a következők közül?

$2^{10} + 2^{10} = 2^{11}$
$2^{10} - 2^{10} = 0^{10}$
$2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20}$
$2^{10} : 2^{10} = 10^0$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

3. $1 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1} + 1}$ egyenlő

(A) 2 (B) $\dfrac{1}{x}$ (C) $-\dfrac{1}{x}$ (D) $x - 1$ (E) $\dfrac{x-1}{x}$

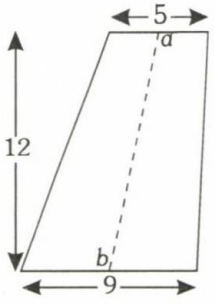
4. n hányféle értéket vehet fel (n egész), hogy $\sqrt{1-(n+2)^2}$ valós szám legyen?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) végtelen sok

5. Melyik a legkisebb szám az alábbiak közül?

(A) $0{,}4^2$ (B) $0{,}5^2$ (C) $0{,}5^{-1}$ (D) 5^{-1} (E) $\sqrt{0{,}25}$

6. Egy tompaszögű trapéz hosszabbik alapja 9, rövidebbik alapja 5 egység. A magasság 12 egység. Ezenfelül a rövidebbik alap egyik csúcsán át húzott merőleges tartalmazza a hosszabbik alap egyik csúcsát. Kössük össze a két alap középpontját! Jelölje ezt a szakaszt: x. Melyik egyenletet illetve egyenlőtlenséget elégíti ki x?

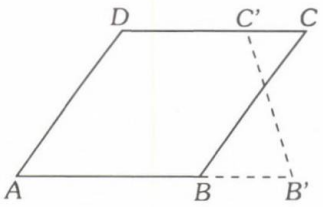


(A) $x \leq 13{,}5$ (B) $13{,}5 < x < 14$ (C) $x = 14$
(D) $14 < x < 14{,}5$ (E) $14{,}5 \leq x$

7. Hány olyan páratlan összetett szám van, amelyre igaz, hogy van olyan $m > 1$ egész, hogy n a szám m-edik hatványa ($1 < n < 1000$)?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Tekintsük az ábrán látható $ABCD$ paralelogrammát! A DC oldalt megrövidítettük 25 %-kal, az AB oldalt pedig meghosszabbítottuk 50 %-kal. Így az $AB'C'D$ trapézt kaptuk. Hány százalékkal nagyobb a kapott trapéz területe a paralelogrammáénál?



(A) 0 % (B) 12,5 % (C) 20 %
(D) 25 % (E) 40 %

9. 2^{1993} – 1992-nek mi az utolsó jegye?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

10. Szorozzuk össze e két polinomot:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^{25})$$

Mi lesz az x^{50} együtthatója?

(A) 1 (B) 25 (C) 26 (D) 50 (E) 51

11. Milyen ábrát írnak le az $\overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OW}$ vektorok összegének végpontjai, ha V „végigfut" a képen látható baloldali egyenesen, W pedig a jobboldali egyenesen?

(A) (B) (C) (D) (E)

12. Egy repülőgép Bombay-ból repül New York-ba, de „pihenésképpen" leszáll Londonban. Ezalatt az idő alatt a következő feladatokat kell elvégezni:

(1) csomagok kirakodása (szükséges idő: 20 perc)
(2) utasok kiszállása (idő: 10 perc)
(3) új csomagok berakodása ((1)-es elvégzése után 20 perc)
(4) a fedélzet kitakarítása ((2)-es elvégzése után 15 perc)
(5) üzemanyag-utántöltés (idő: 20 perc)
(6) technikai ellenőrzés (idő: 30 perc)
(7) az ételek fedélzetre vitele ((4)-es elvégzése után 10 perc)
(8) új utasok beszállása ((4)-es és (5)-ös elvégzése után 25 perc)

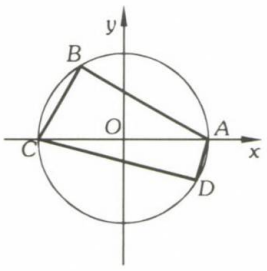
Határozzuk meg azt a legrövidebb időt, amit a gépnek a földön kell töltenie!

(A) 30 perc (B) 50 perc (C) 1 óra
(D) 1 óra 20 perc (E) 2 óra 30 perc

13. Egy A4-es papírlap oldalainak méretei úgy vannak meghatározva, hogy a hosszabbik és rövidebbik oldal „v" aránya változatlan, ha a papírlapot kettévágjuk a hosszabbik oldalak felezőpontjait összekötő szakasz mentén. Melyik egyenletet elégíti ki a „v" arány?

(A) $v = 4$ (B) $v^2 = 4$ (C) $v^3 = 4$ (D) $v^4 = 4$ (E) $v^5 = 4$

14. Az origó középpontú egység sugarú körön a következő pontok adottak:



A-hoz tartozó szög: $AOA\sphericalangle = 0°$

B-hez tartozó szög: $BOA\sphericalangle = 120°$

C-hoz tartozó szög: $COA\sphericalangle = 180°$

D-hoz tartozó szög: $DOA\sphericalangle = 330°$

Az *ABCD* négyszög területe:

(A) $\sqrt{3}+1$ (B) $\sqrt{3}-1$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (E) $\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$

15. A nyári szünet alatt 5 diák (Anna, Balázs, Csaba, Dóra és Erika) rendszeresen jártak úszni. Sajnos minden alkalommal hiányzott valaki, de csak egy valaki. Anna ment el a legkevesebbszer (5-ször), Erika a legtöbbször (8-szor). Mit mondhatunk: Balázs, Csaba és Dóra hányszor mehettek el úszni?

(A) mindegyikük 6-szor
(B) mindegyikük 7-szer
(C) kettejük 6-szor, egyikük 7-szer
(D) egyikük 6-szor, a másik kettő 7-szer
(E) nincs elég információnk

16. Az $y = ax$ és az $y = -x + b$ egyenesek metszéspontjának koordinátái negatívak. Ebből következik, hogy

(A) $a > 0$ és $b > 0$ (B) $a > 0$ és $b < 0$ (C) $a < 0$ és $b > 0$
(E) $a < 0$ és $b < 0$ (E) $ab = 0$

17. a, b, c nemnegatív egészek. Melyik állítás hamis az alábbiak közül? ($a \mid b$ jelenti: a osztja b-t)

(A) ha $a \mid b$, akkor $a \mid bc$
(B) $a \mid 0$
(C) ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid (2b + 5c)$
(D) ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid bc$
(E) ha $a \mid bc$, akkor $a \mid b$ vagy $a \mid c$

18. Két egybevágó kúp úgy helyezkedik el a térben, hogy van közös a forgástengelyük és mindkét alap tartalmazza a másik kúp csúcsát. A kúpok magassága az alap sugarának a kétszerese. A közös rész térfogata pontosan:

(A) $\frac{7}{12}\pi R^3$ (B) $\frac{2}{3}\pi R^3$ (C) $\frac{7}{6}\pi R^3$ (D) $\frac{5}{4}\pi R^3$ (E) $\frac{4}{3}\pi R^3$

19. Egy piros, egy zöld és egy kék ceruzával ki akarjuk színezni egy egyenlő oldalú háromszög oldalait. Hányféleképpen végezhetjük ezt el? Két színezés megegyező, ha egy síkon belüli elmozgatással az egyik háromszög átvihető a másikba.

(A) 6 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 27

20. Tekintsük a következő kifejezést: $(a^b)^c$. Ha a-t, b-t és c-t helyettesítjük a $\{0; 1; 2; 3\}$ halmaz különböző elemeivel, hány különböző értéket kapunk?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

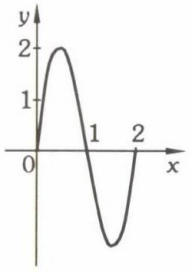
21. Az ABC háromszögben a B és C csúcson át húzott súlyvonalak merőlegesek egymásra. Így $b^2 + c^2$ egyenlő:

(A) a^2 (B) $2a^2$ (C) $3a^2$ (D) $4a^2$ (E) $5a^2$

22. A palindrom egy olyan nemnegatív egész szám, mely változatlan marad, ha a számjegyeit felcseréljük (vagyis balról jobbra ugyanúgy olvassuk ki, mint jobbról balra). Pl.: 121, 0, 2002 és 4 palindromok. Hány darab 1 000 000-nál kisebb palindrom van?

(A) 900 (B) 1991 (C) 1993 (D) 1999 (E) 2220

23. Az ábrán egy szinusz függvény egy teljes periódusát láthatjuk. Melyik ez a függvény?



(A) $y = 2\sin\frac{x}{\pi}$ (B) $y = 2\sin\frac{\pi}{2}x$

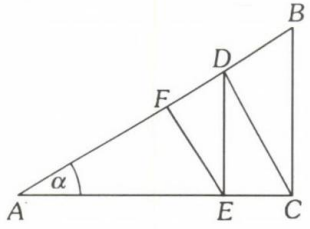
(C) $y = \sin 2x$ (D) $y = \sin \pi x$

(E) $y = 2\sin \pi x$

24. Az $f : x \mapsto \frac{x^2}{2x-1}$ függvény értelmezési tartománya: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Az értékkészlete: $f(D) =$

(A) $\mathbb{R}\setminus]-1, 0[$ (B) $\mathbb{R}\setminus]0, 1[$ (C) $\mathbb{R}\setminus]-2, 0[$ (D) $\mathbb{R}\setminus]0, 2[$ (E) $\mathbb{R}$

25. Az ABC derékszögű háromszögben $AB = 4$ és $A\sphericalangle = \alpha$, valamint CD merőleges AB-re, DE merőleges AC-re és EF merőleges AB-re. Az EF szakasz hossza:



(A) $4\sin^4\alpha$ (B) $4\sin^3\alpha \cos\alpha$

(C) $4\sin^2\alpha \cos^2\alpha$ (D) $4\sin\alpha \cos^3\alpha$

(E) $4\cos^4\alpha$

26. Ha α, β, γ egy háromszög szögei és egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} =$$

(A) $3\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) 1 (E) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

27. Egy nagycsalád áll az ősökből (ősapa + ősanya) és 3 gyerekből, akik közül 2 már házas, 1 még nem. Minden következő házaspárnál ugyanez a szituáció tér vissza (vagyis 3 gyermekük van, melyek közül 2 házas, 1 nem, stb.). Határozzuk meg a család tagjainak számát az ősöktől kezdve a 10. generáció tagjait is beszámítva. (Minden házastárs is benne kell, hogy legyen a számításban!)

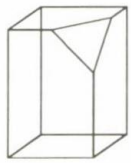
(A) 4095 (B) 4102 (C) 4104 (D) 5115 (E) 5117

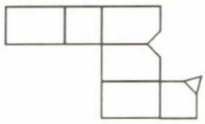
28. Legyen $[x]$ x egészrésze (azaz a legnagyobb egész szám, ami kisebb vagy egyenlő x-szel). x, y valós számok. Melyik állítás igaz a következők közül?

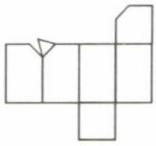
(A) $[x + y] = [x] + [y]$ (B) $[x + y] = [x] + [y] + 1$ (C) $[x + y] > [x] + [y]$

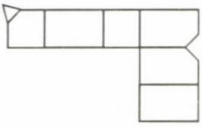
(D) $[x + y] \leqq [x] + [y]$ (E) $[x + y] \leqq [x] + [y] + 1$

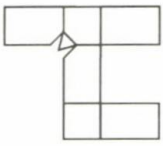
29. A kép egy dobozt ábrázol, amelynek az egyik sarkából egy piramis (tetraéder) „hiányzik". Melyik ábrán látható hálóból lehet összerakni a testet?

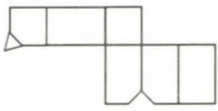


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

30. Tudjuk, hogy n egész és $100 \leqq n \leqq 200$. n hány értékére egyszerűsíthető az $\frac{n^2-3}{n^2-1}$ tört?

(A) 0 (B) 25 (C) 50 (D) 76 (E) 101

MEGOLDÁSOK

1. A	2. E	3. B	4. E	5. A
6. B	7. D	8. B	9. A	10. C
11. E	12. B	13. D	14. C	15. C
16. B	17. E	18. C	19. C	20. C
21. E	22. D	23. E	24. B	25. D
26. B	27. E	28. E	29. E	30. C

A MOZAIK Oktatási Stúdió tankönyvajánlata

Kosztolányi József - Mike János - Palánkainé Jakab Ágnes - Dr. Szederkényi Antalné - Vincze István

MATEMATIKA

Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek

A példatár a jelenlegi általános iskolai matematikai tantervnek, valamint a nemzeti alaptanterv tervezett célkitűzéseinek és követelményeinek figyelembevételével a címben jelzett korosztály által elsajátítandó tananyaghoz tartalmaz bőséges menynyiségű feladatot tematikus csoportosításban. Az egyes feladatcsoportok elsősorban a gyakorlást, a tananyag elmélyítését szolgálják, de lehetőséget nyújtanak az ellenőrzésre, az elsajátított ismeretek, a feladatmegoldó készség kipróbálására is. A könyv a feladatok megoldását nem tartalmazza, ezért iskolai számonkérésre is jól használható.

Megjelent (2. kiadás) Ára: 385,- Ft

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ

Feladatrovat - tanároknak

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **1052 Budapest, Petőfi S. u. 10. II. 10.** Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** 1994. május 31.

FELADATOK

7. Az $ABCD$ négyzetbe úgy írtuk be az XYC háromszöget, hogy annak X csúcsa az AD, Y csúcsa az AB oldalon legyen. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög kerülete kisebb az $AC + BD$ összegnél!

8. Egy n természetes számot „*jó*"-nak mondunk, ha pontosan egyféleképpen bontható fel olyan, legalább kéttagú, természetes számokból álló összegre, ahol a tagok szorzata szintén n. (A csak a tagok sorrendjében különböző összegeket nem tekintjük különbözőknek.) Melyek a „*jó*" természetes számok?

Ambrus Gabriella, Budapest

9. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 4xyz = 0$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

10. Legyen P a valós számoknak egy n elemű részhalmaza. A P elemeivel elkészítjük az $\binom{n}{2}$ darab, páronként vett számtani közepeket. Ezek halmazát jelölje A_P. Legalább hány elemű az A_P?

11. Mutassuk meg, ha egy tetraéder minden lapszöge egyenlő, akkor a tetraéder szabályos! Igaz marad-e az állítás, ha csak öt lapszögről tudjuk, hogy egyenlők?

12. Igazoljuk: Az $f : n \mapsto 1 - n$ az egyetlen olyan egész számokon értelmezett függvény, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik!

(i) $f(f(n)) = n$, minden egész n-re;

(ii) $f(f(n + 2) + 2) = n$, minden egész n-re;

(iii) $f(0) = 1$.

Am. Math. Monthly

Matematika feladatmegoldó verseny IV. forduló

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztályosoknak)

94.9. Keress olyan pozitív egész számot, amely osztható 2-vel és 9-cel, és amelynek összesen
a) 14 pozitív osztója van;
b) 15 pozitív osztója van;
c) 13 pozitív osztója van.

94.10. Egy asztalon 13 bábu áll. Anti és Béla felváltva lépnek, Anti kezd. Egy „lépés" abból áll, hogy *egy vagy két* bábut levesznek az asztalról. Az nyer, aki az utolsó bábut leveszi.
Van-e Antinak olyan kezdő lépése, amely után Béla bármilyen lépései esetén, feltéve, hogy jól lép, ő nyer?
Antinak – ha nem figyel az első lépésre – van-e olyan lépése, ami után Béla, ha jól lép, mindig győzni tud, bármit lép is Anti a továbbiakban?

94.11. Adott egy kör kerületén egy szabályos 7 szög 7 csúcsa. Hogyan kell a hét pontot hét szakasszal összekötni úgy, hogy a lehető legtöbb metszéspontot kapjuk a kör belsejében? Hány metszéspont keletkezik ekkor?
Oldjuk meg a feladatot 7 helyett 17-szöggel!

94.12. Két egybevágó négyzetből egyféleképpen lehet egy ilyen összefüggő síkidomot kirakni: □□ ez a dominó (két kövű). Három egybevágó négyzetből két triminó (három kövű) rakható így össze:

Keresd meg és rajzold le az összes különböző
a) négy négyzetből álló tetraminót,
b) öt négyzetből álló pentaminót,
c) hat négyzetből álló hexaminót.

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztályosoknak)

94.13. Adottak az A és B pozitív egész számok. $A = 11111111$ és $B = 11...11$, ahol összesen 100 darab 1-es számjegy áll egymás után. Számítsuk ki $(A; B)$-t, azaz A és B legnagyobb közös osztóját!

94.14. Egy asztalon 39 bábu van. Andris és Balázs felváltva lépnek, Andris kezd. Egy „lépés" abból áll, hogy minimum három bábut és maximum négy bábut levesznek az asztalról. Az nyer, aki az utolsó bábut leveszi.

Van-e Andrisnak nyerő stratégiája (azaz olyan kezdő lépése és a továbbiakban Balázs egyes lépéseitől függő válaszlépése, hogy minden esetben nyerni tud)?

Van-e Andrisnak olyan (számára rossz) kezdő lépése, hogy ezután Balázsnak van nyerő stratégiája?

94.15. Igazoljuk, hogy ha 1-től n-ig ($n > 1$) összeadjuk a pozitív egész számokat, akkor az így kapott összegek utolsó számjegye periodikusan ismétlődik!
Igaz-e, hogy az összegek utolsó két számjegye is periodikusan ismétlődik?

94.16. Adott 7 pont a síkon: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, amelyekről tudjuk, hogy bármelyik három pontot választjuk is ki közülük, legyenek ezek P_i, P_j és P_k (i, j, k egymástól különböző 1 és 7 közti számok), akkor a $P_iP_jP_k \sphericalangle$ a 30 ° egész számú többszöröse.
Keressünk minél több ilyen elhelyezkedésű ponthetest!
Oldjuk meg a megfelelő feladatot 5 adott pont esetére úgy, hogy az összes szóbajöhető szög 15 ° egész számú többszöröse legyen!

A kitűzött feladatok megoldását részletes indoklással kell leírni. A versenyzőktől elvárjuk, hogy önállóan dolgozzanak. A megoldásokat 1994. április 30-ig kérjük beküldeni az alábbi címre:

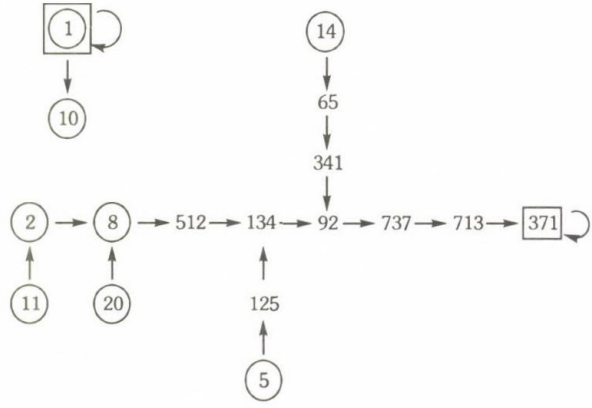
MOZAIK Oktatási Stúdió
6723 Szeged Pf. 301.

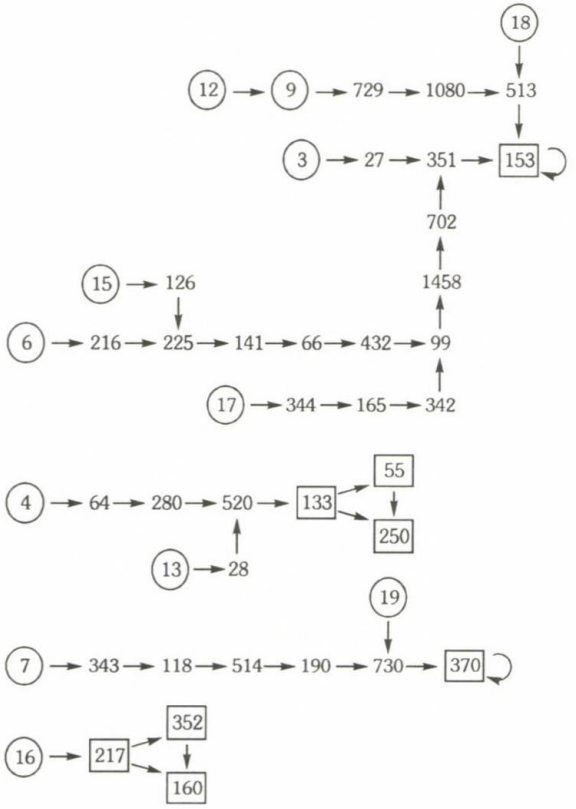
A borítékra kérjük írják rá: *Matematika feladatmegoldó verseny*

A matematika feladatmegoldó pontverseny II. fordulójának megoldásai

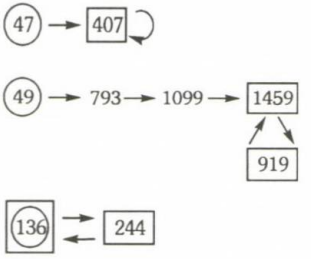
A feladatok az 1993/5. szám 28-29. oldalán találhatók.

93.9. Az áttekinthetőség kedvéért az első 20 pozitív egész számból kiinduló sorozatokat felsoroljuk. Bekarikáztuk azokat a számokat, amiből kiindultunk és téglalap alakú keretbe tettük azokat, amelyek a ciklusban szerepelnek:





Ezután 250-ig megvizsgálva a számokat csak a következő három típusú ,,új'' periódust találjuk (itt is feltüntetjük az egész sorozatot):



Örülnénk, ha a megoldóknak sikerülne a háromjegyű számok körében még további ciklusokat találni.

93.10. Ha a 7 × 7-es táblán a bal felső 4 × 4-es négyzet 16 mezőjét beszínezzük, akkor ezzel már 4 sort és 4 oszlopot is beszíneztünk, tehát összesen 8 sort vagy oszlopot. A 19-hez hiányzó 3 kis négyzetet bárhol színezzük is be, ezzel már nem tudunk újabb sort vagy oszlopot beszínezni, tehát az összes beszínezett sorok vagy oszlopok száma 8 marad.

Lehet-e – valamilyen ,,ravasz'' módszerrel – 8-nál több sort vagy oszlopot beszínezni? Tegyük fel, hogy lehet, azaz legalább 9 sort vagy oszlopot sikerült beszínezni. Ezek között legalább 5 sor vagy legylább 5 oszlop szerepel. De ha például 5 sor van, akkor mindegyikben legalább 4

beszínezett mező van, ami összesen legalább $5 \cdot 4 = 20$, ami lehetetlen. Hasonló módon adódik, hogy nem lehet 4-nél több beszínezett oszlop.

Ezzel megmutattuk, hogy a beszínezett sorok vagy oszlopok száma legfeljebb 8 lehet.

93.11. Először azt érdemes megfigyelni, hogy a 185-ből úgy keletkezik a 851, hogy a szám első jegyét az utolsó helyre írjuk. Ezt másképpen így is leírhatjuk:

$$10 \cdot 185 - 1 \cdot 999 = 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 - 1 \cdot 999 = 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 1 = 851$$

Hasonló módon adódik 851-ből az 518:

$$10 \cdot 851 - 8 \cdot 999 = 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 - 8 \cdot 999 = 5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 8 = 518$$

Most már csak azt kell észrevenni, hogy $999 = 27 \cdot 37$, tehát 999 osztható 27-tel. Mivel 185 osztható 37-tel, így $10 \cdot 185$ is osztható 37-tel és ha ebből a 37-tel osztható $1 \cdot 999$-et kivonjuk, az eredmény, 851 is osztható 37-tel.

Ez a gondolatmenet általánosan is megfogalmazható. Tegyük fel, hogy $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ 37-tel osztható (itt a, b és c számjegyek). Ekkor a

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a = 1000a + 100c + 10b - 999a = 10(\overline{abc}) - 999a$$

szám is osztható 37-tel, mert $10\overline{abc}$ osztható és 999 is osztható 37-tel.

93.12. Két esetet vizsgálunk: a szóban forgó év (1) **nem szökőév**; (2) **szökőév**.

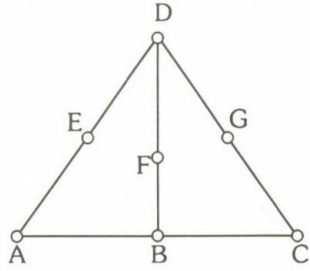
(1) Világos, hogy január minden napja jó, hiszen a januári napoknak az év első napjától számított sorszáma azonos a naphoz tartozó sorszámmal (például január 15-e az év 15. napja) és $1 \cdot 15 = 15$, vagy $1 \cdot 30 = 30$.

Ezután a 2. hónap, február 28 napos, így február 1-je az év 32. napja és 28-a az év 59. napja. $2 \cdot 1 = 2$-től $2 \cdot 28 = 56$-ig nő a hónap és a nap sorszámának szorzata, közben „nem éri utol" az év elejétől számított sorszámot, tehát februárban nincs „jó" nap. Hasonló módon adódik, hogy március 1-je az év 60. napja, március 31-e az év 90. napja, a szorzat közben $3 \cdot 1 = 3$ tól $3 \cdot 31$-ig, azaz 93-ig változik, de mindig 3-mal nő. Közben a két érték nem találkozik.

Hasonló módon végiggondolva két „jó" dátumot találunk: április 30., ami az év 120. napja és $4 \cdot 30 = 120$; továbbá május 30., ami az év 150. napja és $5 \cdot 30 = 150$.

(2) Szökőévben is jó a január minden napja, de ezen kívül azt találjuk, hogy csak március 30. megfelelő, ez az év 90. napja és $3 \cdot 30 = 90$.

93.13. Hamar kiderül – némi töprengés, rajzolgatás után – hogy legalább 7 megálló van a városban. Hiszen ha van 4: A, B, C és D, akkor ezek közül például A, B, C egy vonalon van (pl. az 1-esen), de D már nincs ezen:

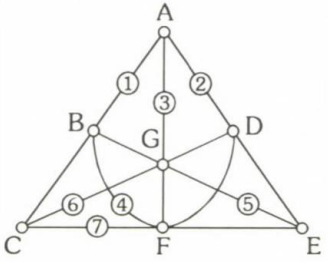


De D-t A-val, B-vel és C-vel is összeköti 1-1- vonal, ezeken újabb 3 megálló van: E, F, G. A kérdés tehát az, 7 megállóval megtervezhető-e az autóbuszhálózat.

A válasz: igen, nézzük a következő táblázatot:

	A	B	C	D	E	F	G
1	•	•	•				
2	•			•	•		
3	•					•	•
4		•		•		•	
5		•			•		•
6			•	•			•
7			•		•	•	

A pontok jelzik, hogy a megfelelő autóbuszvonalon milyen megállók vannak. Az autóbuszvonalakról a következő vázlatos térképet rajzolhatjuk meg:



93.14. Világos, hogy bármely $n > 0$ egész szám megoldása az egyenletnek, hiszen ekkor $[x] = n$, így a bal oldal és a jobb oldal egyenlő. Ezután feltehetjük, hogy x nem pozitív egész és alakítsuk át az egyenletet:

$$x - [x] = 93\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right).$$

Mivel $x \neq [x]$ a feltétel szerint, így mindkét oldalt eloszthatjuk $x - [x]$-szel, így átalakítás után a következő egyenletet kapjuk:

$$x\,[x] = 93.$$

A kapott egyenletről világos, hogy a pozitív számok körében csak 9 és 10 között lehet gyöke (ha $x \leqq 9$, akkor a bal oldal kisebb mint 93, ha $x \geqq 10$, akkor a bal oldal nagyobb mint 93).

Ha $9 < x < 10$, akkor $[x] = 9$ és így az egyenletből $x = \frac{93}{9} > 10$, ami nem lehet.

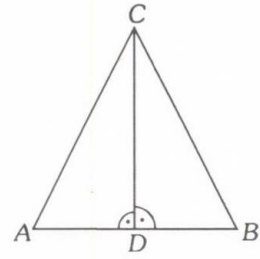
Tehát a pozitív számok körében nem találtunk újabb gyököt.

Ha $x < 0$, akkor az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy $-10 < x < -9$ esetén várható gyök; ekkor $[x] = -10$, így az egyenletből:

$$x = -\frac{93}{10} = -9{,}3.$$

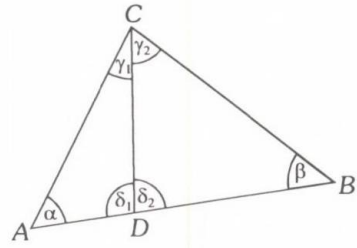
Az egyenletnek tehát a pozitív egész számokon kívül a $-9{,}3$ az egyetlen gyöke.

93.15. Bármely egyenlőszárú háromszög két egybevágó derékszögű háromszögre bontható úgy, hogy meghúzzuk az alaphoz tartozó magasságot. Ez egyben szögfelező és súlyvonal is, tehát a két keletkezett derékszögű háromszög egybevágó: $ADC_{\triangle} \cong BDC_{\triangle}$.



Bármely háromszöget nyilván csak úgy tudunk két háromszögre bontani egy egyenessel, ha ez az egyenes áthalad egyik csúcsán és egy belső pontban metszi a szemközti oldalt. Ha a kapott két háromszög egybevágó, akkor δ_1 egyenlő a $BDC_{\triangle}$ valamelyik szögével.

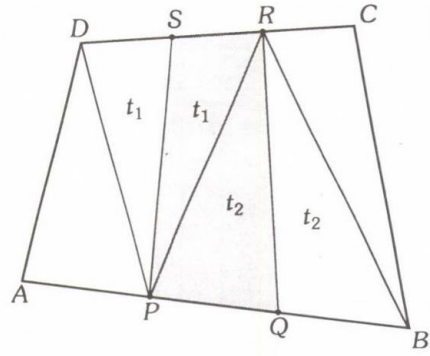
Mivel $\delta_1 = \beta + \gamma_2$, ezért csak $\delta_1 = \delta_2$ jöhet szóba, így $\delta_1 = \delta_2 = 90°$.



A két háromszög tehát derékszögű és mivel az egyik befogójuk közös, $AD = DB$ teljesül, így $AC = BC$, tehát a háromszög egyenlőszárú és CD az alaphoz tartozó magasság.

Mindebből következik, hogy a nem egyenlőszárú háromszögek nem bonthatók fel két egybevágó háromszögre.

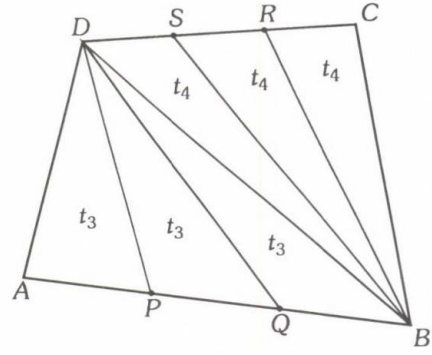
93.16. Az ábrán azonos betűvel jelölt területű háromszögek területe nyilván egyenlő, hiszen a megfelelő háromszögek egy-egy oldala és a hozzá tartozó magassága egyenlő. Ebből következik, hogy a $PQRS$ négyszög területe fele a $PBRD$ négyszög területének.



Most az $ABCD$ négyszöget az újabb ábrán látható szakaszokkal bontjuk háromszögekre. Az egyformán jelölt háromszögek területe itt is egyenlő, mert egyik oldaluk és a hozzá tartozó magasság egyenlő.

Így az $ABCD$ négyszög területe: $3(t_3 + t_4)$, tehát az APD és BCR háromszögek együttes területe az $ABCD$ négyszög területének harmada. Előző eredményünk szerint tehát a $PBRD$ négyszög területe az $ABCD$ négyszög területének kétharmada.

Végül tehát azt kaptuk, hogy a $PQRS$ négyszög területe az $ABCD$ négyszög területének **egyharmada**.



KÖNYVISMERTETÉS

Dr. Korányi Erzsébet

Tankönyvsorozat matematikából

A folyamatosan átalakuló iskolarendszer megkívánja, hogy a tankönyvek írásával és kiadásával igyekezzünk követni az egyre markánsabban kibontakozó változásokat; a közoktatási törvény pedig ad annyi türelmi időt az átrendeződésre, hogy e munkával elébe mehessünk a 9. és 10. osztályok tömeges indításának.

A sokszínű iskolarendszer problémákat vet fel:

a) minden iskolatípusban más-más tankönyvet használjunk,

vagy

b) azonos életkorú gyermekek különböző iskolatípusokban is használhassák ugyanazt a tankönyvet?

Egyértelmű válasz ezekre a kérdésekre nem adható. A törvény alapján, de a pedagógustársadalom szándékai szerint is az egyes iskolák szakmai munkaközösségeinek kell eldönteniük, milyen program szerint és milyen tanulói segédletekkel kívánják végezni a munkájukat. A tanulói segédleteket illetően jelenleg sajnos még igen kicsi a választék, sok iskola kénytelen saját maga összeszedni azokat a könyvrészleteket, jegyzeteket, amelyek alapján a programjuknak leginkább megfelelő anyagot tanítványaik számára összeállíthatják.

Fontos lenne, hogy minél előbb kialakuljon egy olyan tanterv- és tankönyvbank, amelyből az iskolák válogathatnának. Ekkor összhangban állna a többéves program és a diákok kezében lévő tankönyvcsalád, biztos lenne, hogy a témák egymásra épülnek, teljes rendszert alkotnak, és – ami egyáltalán nem mellékes – az egyes művek az adott korosztályhoz szólnak.

A következőkben egy ilyen, konkrét program alapján készülő tankönyvsorozatot szeretnék bemutatni.

A Matematika 13 éveseknek c. tankönyv, úgy gondolom, különösen jól használható a 6 osztályos gimnáziumok első osztályában, mert összefoglaló, ismétlő, alapozó jellegű munka; alkalmas arra, hogy az esetleg különböző általános iskolákból jött tanulókat közös szintre hozza, segítsen a hiányok pótlásában. Ugyanakkor ez a fajta tevékenység az általános iskolák 7. osztályában szintén hasznos lehet, mert a középiskolai előkészítést segíti elő. Érdekességként megemlítem, hogy a tankönyv egyik bírálója szerint gyengébb felkészültségű 15 éves szakmunkástanulók oktatására is alkalmas lenne. – Nem gondolom viszont, hogy matematika tagozatos osztály számára elég ismeretet nyújtana. Az általam elképzelt heti óraszám: 4 - 5.

A sorozat következő két könyve: Matematika 14 éveseknek tankönyv és gyakorlókönyv már szintén elkészült, sajtó alatt van, 1994 nyarán fog megjelenni. A további folytatás kétirányú lesz: egyrészt a 9. és a 10. osztály, másrészt (természetesen külön, más program szerint) a gimnáziumok következő évfolyamai számára. A 9. osztályok számára már 1994. nyarán megjelenik a tankönyv és a gyakorlókönyv.

Milyen programok szerint készültek és készülnek ezek a könyvek?

Addig, amíg hivatalosan meg nem jelenik a Nemzeti Alaptanterv követelményrendszere, csak remélhető, hogy az általam összeállított tanterv ennek meg fog felelni. Programom lé-

nyege, hogy hat (illetve négy évre elosztva, a szükséges ismétlődéseket figyelembe véve haladok végig az általam korszerűnek, hasznosnak vélt témákon, különös gondot fordítva a tanulók életkori sajátosságaira.

Talán leginkább abban térek el a megszokottól, hogy amit egyszer megtanítok, arra támaszkodom is. Újratanítás csak olyan fogalmak esetében lép fel, amelyeknek a kialakítása hosszú folyamat (valós szám, függvény, terület stb.) Fölöslegesnek tartom, hogy (mint most az első gimnáziumokban) 14-15 éves tanulókkal gyakoroltassuk a törtek közös nevezőre hozását, szakaszfelező merőleges szerkesztését vagy egyéb olyan dolgokat, amelyeket évekkel korábban kellett volna elsajátítaniuk. Ugyancsak fölöslegesnek tartom, hogy 13 éveseknek tanítsuk a hasonlóságot, amikor ezt 16 éves korukban újra elölről kell kezdenünk.

Nem én találtam ki, de igyekszem betartani, hogy minden témát akkor tanítsunk, amikor azt a legkönnyebben megértik a diákok. Kisebb gyermekekkel a legegyszerűbb tananyag gyakoroltatása során is rengeteg lehetőség nyílik a logikus gondolkodás fejlesztésére, a számokkal, a bennünket körülvevő tárgyakkal való ismerkedésre, nem szükséges ehhez mértani sorozatokat vagy másodfokú függvényeket emlegetni.

A 9. és a 10. osztályt nem tekintem melegedőnek, parkolónak; úgy gondolom, hogy a szakmunkásképzőbe kerülő fiataloknak kell itt biztos alapot, matematikai műveltséget adnunk. Szerintem helye van ezekben az osztályokban a valószínűségszámítás, a sorozatok, a másodfokú egyenlet, a hasonlóság tanításának, a derékszögű háromszög trigonometriájának; alapos testmértani ismereteket kell nyújtanunk, sőt egy kis ábrázoló geometria is igen hasznos lenne.

Ennyit a programról.

Milyen a már megjelent és a sajtó alatt lévő könyvek szerkezete? Milyen módszertani felfogású kollégáknak ajánlom ezeket a könyveket?

A második kérdésre válaszolok először. Azoknak a kollégáknak ajánlom, akik azt szeretik, ha a tanítványaik

először maguk felfedezik,

azután megtanulják

a tananyagot. Véleményem szerint e két lépés mindegyike szükséges a teljesítőképes, értelmes tudás kialakításához.

Ennek megfelelően a következőképpen építettem fel a 13 és a 14 éveseknek szóló tankönyvet: ha kinyitjuk a könyvet, a bal oldalon feladatsorokat találunk az egyes témákhoz, a jobb oldalon pedig ugyanehhez kidolgozott feladatot, a fogalmak magyarázatát, a megfigyelések pontos leírását, vagyis a tanulnivalót. Egy-egy szakasz általában egy – másfél oldal a bal- és a jobb oldalon is. A feladatsorok alkalmasak arra, hogy órai vagy otthoni munka során a tanulók körüljárják a sorra kerülő problémát, tapasztalatokat gyűjtsenek, megfigyeléseket tegyenek. Sok a kifejezetten gyakorlati feladat, amelyet otthon kell elvégezni. A tanórán, a szaktanár vezetésével összegyűjthetik a tapasztalatokat, kialakíthatják a pontos fogalmat, majd alkalmazzák.

– Mindez időigényes, nagy türelmet igényel a tanártól. Ha azonban arra gondolunk, hány tanév áll a rendelkezésünkre, belátjuk, hogy az erős alapok kialakításától nem szabad az időt sajnálnunk. Minél erősebb az alap, annál többet építhetünk rá a következő években.

A 13 éveseknek szóló könyv mottója Non scholae sed vitae discimus, a következőé: Non multa sed multum szabadon fordítva: ne sokat, hanem alaposan.

A tankönyvhöz szorosan kötődik a Gyakorlókönyv. Ez sorban a tankönyv fejezeteihez csatlakozva tartalmaz sok száz egyszerű, ténylegesen gyakorló feladatot, de találhatnak a tanulók gondolkodtatóbb, nehezebb feladatokat is.

Úgynevezett érdekes példák, mulatságos problémák a tankönyvben is, a gyakorlókönyvben is a szokásosnál nagyobb számban akadnak. Talán nem nagy baj, ha derűsek, vidámak vagyunk a matematikaórán.

Befejezésül: remélem, lesz rá lehetőségem, hogy a teljes sorozatot elkészítsem. Az első könyveket már az idei tanévben is használják, folyamatosan készül a többi. Jó lenne, ha a megelőzőkben említett tanterv- és tankönyvbank részeként, más sorozatokkal összehasonlítva is elnyerné kollégáim tetszését, ha sok gyerek szerezhetné meg ennek segítségével a matematikai ismereteit.

A MOZAIK Oktatási Stúdió ajánlatából

Hajnal Imre

MATEMATIKAI ISMERETEK 13-14 ÉVESEKNEK

Ez a könyv a 13-14 éves tanulók tanításához, tanulásához úgy kíván segítséget nyújtani, hogy a matematikai fogalmak kialakulását, értelmezését és a közöttük lévő kapcsolatokat állítja előtérbe. Igyekszik rámutatni, hogy az egyszerű, megszokott munkában is felismerhetünk érdekességeket, és ezekből hasznos új ismeretekhez juthatunk. A megfigyelések tudatos megfogalmazása, és a lényeg felismerése után következik az új ismeret tisztázása, értelmezése. Közben lehetőséget ad, példát mutat elvonatkoztatásra, absztrakcióra. Az anyag áttekintését, a logikai rend felismerését a tárgyalásmód és a könyv szerkezete igyekszik megkönnyíteni.

Megjelent ára: 275,- Ft

Urbán János

HATÁRÉRTÉKSZÁMÍTÁS - PÉLDATÁR

A könyv első kiadása a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg a Bolyai Könyvek sorozatban, s régóta hiánycikk. A példatár kifejezés utal rá, hogy a címben jelzett témát a könyv gyakorlatokon és feladatokon keresztül dolgozza fel, ezen kívül tartalmazza azok részletes megoldásait is. Az első fejezet a valós számok alaptulajdonságait, a teljes indukciót és a sorozatok határértékét tárgyalja. Alkalmazásként szerepel a valós kitevőjű hatvány szabatos definíciója és a végtelen lánctörtek. A második fejezet témája a függvény határértéke és néhány alkalmazása. A harmadik fejezet a differenciálhányados fogalmát és alkalmazását tárgyalja függvényvizsgálat és határértékfeladatok megoldására. A könyvet matematika tagozatos középiskolai tanulóknak, valamint matematikát hallgató főiskolásoknak, egyetemistáknak, matematika szakos tanároknak ajánljuk.

Megjelent ára: 396,- Ft

Kosztolányi József - Mike János - Vincze István

ÉRDEKES MATEMATIKAI FELADATOK

A feladatgyűjtemény elsősorban a felső tagozatos és a középiskola elsős, illetve másodikos tanulói számára készült. A témakörök a hagyományos elemi matematika területei mellett (algebra, geometria) számos olyan érdekes és gondolkodtató matematikai problémát is tartalmaznak, amelyek megoldásához a logikus gondolkodáson kívül szinte más nem is igen szükséges. A feladatgyűjtemény alapjául a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium Matematika Iskola néven közismertté vált kísérleti munkája szolgált.

Megjelent ára: 275,- Ft

Könyvajánlat

ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI-FELVÉTELI FELADATOK

FIZIKA (1989-1993)
MATEMATIKA (1989-1993)
KÉMIA (1988-1992)
FÖLDRAJZ (1989-1993)
BIOLÓGIA (1988-1992)

A kiadványok a felsőfokú oktatási intézmények elmúlt négy évi felvételi és érettségi feladatsorát, valamint azok megoldásait tartalmazzák. A 15-20 feladatsor elősegíti, hogy bárki eredményesen felkészüljön az érettségi, illetve felvételi vizsgára, valamint a tárgyak egyetemi, főiskolai tanulására.

Megjelent 187,- Ft

Bonifert Domonkos

Néhány tipikus problémaszituáció matematikából
Feladatok és megoldások

Az olvasó olyan példatárat vehet a kezébe, amelyben a feladatok nem a megszokott témakörök, hanem megoldási eljárások szerinti csoportosításban találhatók. A fejezetcímek:

I. Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek
II. Bizonyítások
III. Szélsőérték-feladatok
IV. Van olyan? Számlálási technikák
V. Egyéb érdekességek

A kötet sajátossága, hogy ugyanazon probléma megoldását többféle módszerrel, más-más szintű megközelítésben, az ötletek sokaságának felhasználásával mutatja be. A feladatok tanulmányozása, feldolgozása tehetséges általános és középiskolai tanulók, valamint az őket tanító tanárok számára is hasznos lehet.

Megjelent 359,- Ft

Urbán János

Matek^{+} 15 éveseknek
Matematikai tehetséggondozás 15 éves korban

A kötet egyéves, heti 2 órás matematika szakköri foglalkozás anyagát tartalmazza 8 fejezetben. Összesen 188 feladatot. Számelméleti, kombinatorikai, gráfelméleti, valószínűségszámítási feladatok, továbbá ízelítőként néhány függvénytani, algebrai, elemi sík- és térgeometriai feladatsor kapott helyet a kötetben. A (hagyományos 4 osztályos) gimnázium első osztályos tananyagát egészíti ki, ezen kívül csak a másodfokú egyenlet megoldásának ismeretét tételezi fel. Az összeállításban - a valódi szakköri munkának megfelelően - az egyes témák visszatérőek, kiegészítésre, ismétlésre is sor kerül.

A részletes megoldásokat esetenként rövid módszertani megjegyzések, tanácsok kísérik.

Megjelent ára: 206,-Ft

TUDÁSSZINTMÉRŐ FELADATLAPOK

FIZIKA 6., 7., 8. o.
FÖLDRAJZ 6., 7., 8. osztály
BIOLÓGIA 6., 7., 8. o.
KÉMIA 7., 8. o.
MATEMATIKA 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8. o.

imasoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

994. MÁJUS ára: 88,- Ft II. évf. / 3. szám

TARTALOM

GONDOLATOK 1994-RŐL
Brenyó Mihály
tanár, Kecskemét

MELYIK KÉT SZÁM
Uhrin Jánosné
tanítónő
Uhrin János
tanár, Békéscsaba

STATISZTIKA A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÍTÁSBAN II.
Vancsó Ödön
tanársegéd, ELTE, Budapest

EGY MÉRTANI SZÉLSŐÉRTÉK FELADATRÓL
Popovici Florin, Bence Mihály
tanárok, Brassó

MATEMETIKATÖRTÉNET ÉS ISMERETELMÉLET A MATEMATIKATANÍTÁSBAN
Mohay Péter
tanár, Budapest

HÍREK VERSENYEKRŐL

FELADATROVAT TANÁROKNAK

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSAI

KÖNYVISMERTETÉS

A téli, a tavaszi szünet után a matematikaórák jó hangulatát megteremtve számíthat a tanár diákjainak figyelmére, aktív együttműködésére. A motivációt a januári kezdéskor az 1994-ben, mint számban találtam meg. A megszokott kérdés – mit várunk az új esztendőtől? – mellett... *(3. oldal)*

A következő játék az alsó tagozaton az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és főleg az összeg, különbség és szorzat bontásának csoportos gyakorlására alkalmas, nagyobbaknak pedig a hatvány, gyök, logaritmus fogalmának elmélyítésére. Amint látni fogjuk, nem mechanikus... *(4. oldal)*

A címben megadott témában 1993. július 19-24-ig a dél-franciaországi Montpellier-ben Európai Nyári Egyetemet rendeztek. Csaknem 300 matematikatanár érkezett ebbe a kellemes hangulatú, napsütötte egyetemi városba, fele Franciaországból, a másik fele mintegy... *(17. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 440 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

GONDOLATOK 1994-RŐL
Brenyó Mihály
tanár, Kecskemét

MELYIK KÉT SZÁM
Uhrin Jánosné
tanítónő
Uhrin János
tanár, Békéscsaba

STATISZTIKA A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÍTÁSBAN II.
Vancsó Ödön
tanársegéd, ELTE, Budapest

EGY MÉRTANI SZÉLSŐÉRTÉK FELADATRÓL
Popovici Florin, Bence Mihály
tanárok, Brassó

MATEMETIKATÖRTÉNET ÉS ISMERETELMÉLET A MATEMATIKATANÍTÁSBAN
Mohay Péter
tanár, Budapest

HÍREK VERSENYEKRŐL

FELADATROVAT TANÁROKNAK

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSAI

KÖNYVISMERTETÉS

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Brenyó Mihály

Gondolatok 1994-ről

A téli, a tavaszi szünet után a matematikaórák jó hangulatát megteremtve számíthat a tanár diákjainak figyelmére, aktív együttműködésére. A motivációt a januári kezdéskor az 1994-ben, mint számban találtam meg. A megszokott kérdés – mit várunk az új esztendőtől? – mellett feltettem a „Mit tudunk az 1994-ről" kérdést tanítványaimnak. A nyolcosztályos gimnázium első három évfolyamán természetesen különböző mélységig jutottunk. Örömmel tapasztaltam, hogy a téma folytatását igényelték diákjaim. Még a kis matematikusok baráti körének egy foglalkozása sem volt időben elegendő. Majd a 100. órán folytatjuk gondolattal hagytuk abba az újabb kérdések feltevését és megválaszolását.

A most következő néhány feladat a tanulók felkészültsége és érdeklődése szerint folytatható, újabb ötletekkel gazdagítható.

Milyen szám az 1994? Páros, melynek csak 4 pozitív osztója van: 1, 2, 997 és az 1994. Érdekes volt számolással ellenőrizve rájönni, hogy a 997 prímszám. Ügyesebb diákjaim felfedezték, hogy az 1994 önmagánál kisebb osztóinak összege éppen 1000.

A nagyobb diákok úgy jöttek az előbbiekre rá, hogy a következő feladatot oldották meg:

Mennyi a felszíne annak a téglatestnek, amelynek élei egész számok, és térfogatának mérőszáma 1994? A két megoldást hamar meg is találták.

Az 1994 számjegyeinek összege 23, ami prímszám – mondta egyik diákom. Kézenfekvő volt folytatni. Milyen természetes számok állíthatók elő úgy, hogy a 4 szám közé műveleti jeleket tehetünk és zárójeleket is használhatunk? E számok közül melyik a legkisebb, melyik a legnagyobb? Vajon az osztályozás jegyei előállnak-e így? Az $1 = 1 + (9 - 9) \cdot 4$-re és $4 = 1 \cdot (9 - 9) + 4$-re hamar rátaláltak. Míg az $5 = 1 + (9 : 9) \cdot 4$-re és a $2 = (1 + 9) : (9 - 4)$ sokkal nehezebbnek bizonyult.

Van 4 számkártyám, amelyeken az 1, 9, 9, 4 szám áll. Hány szám állítható elő ezekből? Mennyi a kétjegyűek, a háromjegyűek, a négyjegyűek összege? Mennyi a legkisebb négyjegyű és a legnagyobb háromjegyű különbsége?...

A mire végződik kérdésre íme néhány feladat.

1994^{1994}

$1^{1994} + 9^{1994} + 9^{1994} + 4^{1994}$

$1^{1994} \cdot 2^{1994} \cdot 997^{1994}$

$1! + 2! + 3! + \ldots + 1993! + 1994!$

1994 db számjeggyel – 1-gyel kezdve a számozást – hány oldalas könyv számozható meg?

Pontosan 1994 számjegyet használtunk fel egy könyv megszámozásához. Hányadik oldalon kezdtük számozni a könyvet?

Az 1994-et egymás után igen sokszor leírtuk. Ebben a sorban milyen számjegy áll az 1994. helyen?

Ha leírnánk azokat a számokat, amelyekben a számjegyek összege 1994, és növekvő sorba raknánk, mi lenne a legelső számjegy, amit le kellene írnunk?

Házi feladatként leírták a diákok az 1994-et különböző számrendszerekben.

Hasznos volt megbeszélni, hogy mit jelentenek, mit jeleznek az utolsó számjegyek.

Két prímszám összegeként $997 + 997$ könnyű volt előállítani az 1994-et. Sok otthoni számolással derült ki, hogy két négyzetszám összegeként is felírható $1994 = 25^2 + 37^2$.

A kisebbek a hagyományos szorzást, a nagyobbak a zsebszámológép használatát gyakorolták így.

Felvethető az a kérdés is, hogy egymás utáni pozitív egész számok összegeként elő-

áll-e, és hogyan az 1994? A kérdésre adott válasz előtt érdemes megvizsgálni, hogy 2, 3, 4, ... egymás utáni egész szám összege milyen tulajdonságú. Ezt követően nézzük meg, hogy az 1994 melyiknek felel meg (itt hasznosítható a különböző számrendszerekben való felírás)! Ezt követően önálló munkára adható fel az a feladat, hogy egymás utáni páros, ill. egymás utáni páratlan számok összegeként előállítható-e az 1994.

Mind a másodikosok, mind a harmadikosok nagy élvezettel gondolták végig és oldották meg azt a kérdést, hogy egy négyzet felbontható-e 1994 db nem feltétlenül egybevágó négyzetre. A számsorozatok vizsgálata és a geometriainak tűnő probléma összefüggése keltett nagy érdeklődést.

Hasznos volt megmutatni a következő megoldást:

Vegyük az 1994-nél nagyobb négyszámok közül a legkisebbet, ez a 2025. Az mindössze 31-gyel nagyobb 1994-nél. Lehet-e valami törléses módszerrel továbbhaladni? Tudjuk, hogy 4 db, ill. 9 db kis négyzetből lehet egyet csinálni. A négyzetek száma ekkor hárommal, ill. nyolccal csökken. A feladat tehát akkor oldható meg, ha a 31 előáll $3n + 8m$ alakban, azaz a $3n + 8m = 31$ diophantikus egyenlet megoldható. Igen, $n = 5$, és $m = 2$ megfelelő számok. A harmadikosokkal az elsőfokú függvények témakörénél jártunk, így megnéztük a $3x + 8y = 31$ lineáris függvény képét. Felfedezték a gyerekek, hogy ez a (5; 2) ponton halad át.

11-12 éves gyerekekkel építőkockákkal is dolgozunk, amikor a legegyszerűbb testeket tanítjuk. Ehhez kapcsolódóan kérdezhetjük: 1 cm élű kiskockákat lapjával egymásra rakunk. Elérhető-e, hogy az így létrejött négyzetes oszlop felszíne 1994 cm^2 legyen?

1 cm élű kiskockákból építettem egy 18 cm élű nagy kockát. Ezután egy lapjáról elvettem kis kockákat, és az így keletkezett test felszíne 1994 cm^2 lett. Legalább hány 1 cm^3 kocka elvételével értem ezt el? (13)

Fel lehet-e bontani egy kockát 1994 db nem feltétlenül azonos élű kis kockára? A válasz: igen, pl. így: bontsuk fel először az élek 12 egyenlő részre osztásával 1728 részre. Ezután 38 db kockát 8-8 részre. Így pontosan 1994 db kockánk van.

Egy cm^3-es kis kockákból építettem egy 17 cm élű nagy kockát. Ennek felső lapjára 1 cm-es lépcsőjű piramist építettem 581 kis kocka felhasználásával. A piramis csúcsa 2 cm magas. Az így keletkezett test felszíne éppen 1994 cm^2.

Uhrin Jánosné - Uhrin János

Melyik két szám? Játék az alapműveletekkel 6-18 éveseknek

A következő játék az alsó tagozaton az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és főleg az összeg, különbség és szorzat bontásának csoportos gyakorlására alkalmas, nagyobbaknak pedig a hatvány, gyök, logaritmus fogalmának elmélyítésére. Amint látni fogjuk, nem mechanikus memorizálás, hanem a logikai készséget is fejleszti, és a legkülönbözőbb képességű csoportokkal versenyszerűen játszható.

A játék legfőbb kelléke 10 kártyalap, amelyekre felírjuk a számjegyeket 0-9-ig. Fontos jól megjegyeztetni a tanulókkal, hogy minden számjegy pontosan egyszer fordul elő a kártyákon. Minden művelet esetén számpárokat kell kitalálni.

1. Összeadás

Az összekevert lapokból öt gyerek 2-2-t húz, majd mindegyik felírja a lapjain lévő számok összegét a táblára, a többiek esetleg a füzetükbe. Párban vagy több csoportban is folyhat a játék egy ügyesebb tanuló vezetésé-

vel. Ő feljegyzi a kettesével kihúzott számokat, és megmondja az összegeket. Ezeket a játékostárs, vagy csoport feljegyzi. A játékvezető lapját a többiek természetesen nem láthatják. Ezután a gyerekek (egy-egy kiválasztott csoport vagy az egész osztály) igyekszenek kitalálni, hogy melyik számot húzta.

Tegyük fel, hogy a kihúzott számok összege:

14 9 2 15 5

A versenyzőknek nyilván minden számot fel kell bontani minden lehetséges módon két számjegy összegére, majd tippelni, ha több lehetőség van. Aki kitalálja, megkapja a két kártyát, és mindannyian felírják a két szám összegét a felbontott szám mellé. Aki talált, tovább próbálkozhat. Ha nem, akkor más kérdez tovább (jelentkezés, vagy meghatározott sorrend szerint), de játékban marad mindenki.

A verseny győztese az, aki a legtöbb kártyát gyűjtötte.

A felbontás és tippelés bármelyik összeggel kezdhető, és mindig érdekes, változatos gyakorlást jelent. Ámde bizonyára akadnak gyerekek, akik észreveszik, ha valamelyik összeg esetleg csak egyféleképpen bontható (példánkban $2 = 0 + 2$). A felírt bontásokban szereplő számjegyek pedig segítik a következők kiválasztását. Pl. $5 = 1 + 4$, mert $0 + 5$, $2 + 3$ nem lehet, továbbá a $9 = 3 + 6$, mert a $0 + 9$, $1 + 8$, $2 + 7$, $4 + 5$ egyik tagja már szerepelt. A megmaradt számjegyekből (5, 7, 8, 9) már könnyen előállítható a $14 = 5 + 9$ és a $15 = 7 + 8$.

A játékban nem okoz fennakadást, ha a gyerekek eleinte nem veszik észre a fenti lehetőségeket. A felbontás eseteit sorra véve, tippeléssel is továbbhaladhatnak. Sok „parti" lejátszása közben azonban biztosan rájönnek a cél gyorsabb elérésének a taktikájára. Ezzel pedig fejlődik logikus gondolkodásuk és kombinatív készségük.

Rendezhető frontális foglalkoztatás, csapatverseny, képesség szerinti csoportok gyakoroltatása egyaránt.

A játék egyszerűbb változatában kevesebb gyerek húz lappárt. Ekkor természetesen a tippelés lép előtérbe.

Nehezebb a játék, ha több számot írunk kártyalapokra (pl. 0-15-ig), vagy kevesebben, de több lapot húznak (pl. 3 gyerek 3-3 lapot és a 0-t kihagyjuk).

2. Kivonás

A kihúzott lappárokon lévő számok különbségét írja, vagy mutatja fel az öt tanuló. Pl.

7 5 4 3 6

A versenyzőknek minden számot elő kell állítani két szám különbségeként, majd ezek közül tippelni. Ha rájönnek, hogy a legnagyobb számot lehet a legkevesebb módon a számjegyek különbségeként felírni, akkor kevesebb próbálkozással célhoz érnek. Esetünkben $7 = 9 - 2 = 8 - 1 = 7 - 0$ lehetséges.

Tegyük fel, hogy a $8 - 1$ a helyes tipp. Ekkor a $6 = 9 - 3 = 8 - 2 = 7 - 1 = 6 - 0$ közül csak az első és utolsó jöhet szóba. Amennyiben $6 - 0$ a megfelelő, akkor az $5 = 9 - 4 = 8 - 3 = 7 - 2 = 6 - 1 = 5 - 0$ közül a $9 - 4$ vagy a $7 - 2$ választható. Ha 9 és 4 van a lapokon, akkor a $3 = 9 - 6 = 8 - 5 = 7 - 4 = 6 - 3 = 5 - 2 = 4 - 1 = 3 - 0$ közül az $5 - 2$ a helyes, mivel a többi számjegy már szerepelt.

3. Szorzás

A kihúzott számjegyek szorzatát írják fel a tanulók. Pl.

12 16 35 9 0

A versenyzőknek minden számot fel kell bontani két különböző számjegy szorzatára. A lehetőségek száma sokkal kevesebb mint az összeadásnál és kivonásnál, így könnyebb a választás. Mivel csak a $16 = 2 \cdot 8$, $35 = 5 \cdot 7$, $9 = 1 \cdot 9$ lehetséges, ezért $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$-ből a 3 és 4 lehet a lapokon; végül $0 = 6 \cdot 0$.

A játékban elvileg a teljes szorzótábla kiadódik, kivéve az azonos tényezőket. Ezek is megjelennek, ha minden számjegy két kártyán szerepel. Ezzel a „választék" egyéb esetekkel is bővül.

A nagyobbak számára kiterjeszthető a játék a „nagy egyszeregy"-re, illetve a háromtényezős szorzatokra (a 0-t kihagyjuk a számjegyek közül).

4. Osztás

A kártyákon 1-10-ig legyenek a számok. A kihúzott számok hányadosát (a nagyobbat osztjuk a kisebbel) és a maradékot írják fel a tanulók. Pl.

hányados	8	2	2	1	1
maradék	0	1	0	3	1

A lehetséges hányadosok és maradékok számbavételével és tippeléssel bármelyik esettel kezdhető a számpárok meghatározása.

Hamarosan rájönnek azonban a tanulók, hogy a legnagyobb hányadossal érdemes kezdeni, illetve az esetleges maradék nélkülivel.

Esetünkben $8 = 8 : 1$, egyetlen lehetőség, az egyik számpár a 8 és 1. A $2 = 2 : 1 = 4 : 2 = 6 : 3 = 8 : 4 = 10 : 5$ közül három jöhet szóba. Tippeléssel kiválasztható a húzott két szám, legyen ez a 6 és 3. A megmaradt számok: 2, 4, 5, 7, 9, 10. A 2-es párja csak az 5-ös lehet, mert 2-nél nagyobb hányados és 1 maradék nincs. A készlet négy számra fogyott: 4, 7, 9, 10. Ezekből már könnyen kiválasztható a megfelelő $7 : 4$ és a $10 : 9$ (a hányados 1, a maradék 3, illetve 1).

Lényegesen nehezebb a játék, ha csak a maradékokat mondjuk meg.

5. Hatványozás

Ehhez és a következő játékokhoz kalkulátor szükséges. Kártyalapokra felírt számjegyekből (0-9) kettesével húzatunk, de a játékosoknak nem mutatjuk meg a lapokat.

Az egyik szám az alap, a másik a kitevő. A kiszámított hatványokat felírjuk a táblára, a tanulók a füzetükbe jegyzik. A feladat: ki kell találni a hatványokból a kihúzott számpárokat. Pl.

2187 32 0 4096 9

Az egyik a 2 és 5, mert csak $32 = 2^5$ lehetséges.

Egy másik az 1 és 9, mert csak $9 = 9^1$ lehet, $9 = 3^2$ már nem.

A 4096 osztható 4-gyel, ezért kipróbáljuk, hogy a 4 egész kitevőjű hatványa-e? Számológéppel gyorsan megállapítható, hogy $4096 = 4^6$, az újabb számpár a 4 és a 6. Hasonlóan kitalálható, hogy $2187 = 3^7$, a negyedik számpár a 3 és 7. Végül a 0 kitevője csak 8 lehet, az ötödik számpár a 0 és 8.

6. Gyökvonás

A kártyákra célszerűbb 1-10-ig írni a számokat. A párosával kihúzott számok egyike az alap, a másik a gyökkitevő. Számológéppel kiszámítjuk a gyököket két tizedesjegy pontossággal, és felírjuk. Ezekből kell meghatározni a kihúzott számpárokat.

Pl. 1,77 2,82 21,47 1 1,12

A legnagyobb gyököt a nagyobb számok kisebb kitevőjű gyökei között kell keresni. Mivel $\sqrt{9} = 3$ és $\sqrt[3]{10}$ a 2-höz közeli, a $\sqrt{8}$-at számítsuk ki. A $\sqrt{8} = 2{,}82$, az egyik számpár a 2 és 8.

A következő legnagyobb gyök az 1,77. A $\sqrt[3]{8} = 2$, ezért a $\sqrt[4]{9}$ és $\sqrt[4]{10}$-et számoljuk ki. A $\sqrt[4]{10} = 1{,}77$, a számpár a 4 és 10.

Az 1,12-t kis szám nagy kitevőjű gyökei között keressük: $\sqrt[9]{3} = 1{,}12$, a számpár 9 és 3. A megmaradt nagyobb gyököt (1,47) a nagyobb számok kisebb kitevőjű gyökei közül választhatjuk ki: $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[5]{6}$. Az $\sqrt[5]{7} = 1{,}47$, a számpár 5 és 7. Az utolsó gyök csak $\sqrt[6]{1} = 1$ lehet, a számpár 1 és 6.

7. Logaritmus

A kártyákra most is 1-10-ig írjuk a számokat. A kihúzott számpárok egyike az alap, a másik a numerus. Számológéppel kiszámítjuk a logaritmusokat ($\log_a b = \lg b : \lg a$) két tizedesjegy pontossággal és felírjuk. Ezekből kell meghatározni a számpárokat.

Pl. 0,43 1,89 0 0,95 1,29

A legnagyobbi kitevő (1,89) a 2-höz közeli szám. A $\log_2 4 = 2$ és $\log_3 9 = 2$ miatt a $\log_2 3$ és $\log_3 8$-at próbáljuk. A $\log_3 8 = 1{,}89$, a számpár 3 és 8. Mivel a 0,43 a 0,5-höz közeli érték, és $\log_4 2 = 0{,}5$, $\log_9 3 = 0{,}5$, a $\log_5 2$ és lg9-et határozzuk meg. Az $\log_5 2 = 0{,}43$, a számpár 5 és 2.

A 0,95 az 1-hez közeli, ezért $\log_7 6$, vagy lg9 a valószínű. Kiszámítva: $\lg 9 = 0{,}95$, a számpár 10 és 9.

Az 1,29-hez a $\log_4 6$, vagy $\log_4 7$ jöhet szóba. A $\log_4 6 = 1{,}29$, a számpár a 4 és 6. Végül $\log_7 1 = 0$, az utólsó számpár a 7 és 1.

8. Kérdések

Az ismertetett játékokhoz alaposabb meggondolást igénylő kérdések kapcsolhatók:

Hányféleképpen választható ki az egyes játékokban az 5 lappár?

Hányféle összeg, különbség, szorzat stb. áll elő?

Milyen határok között változik az összegek, különbségek, szorzatok stb. összege?

Mely esetekben találhatók ki a lapokon lévő számok tippelés nélkül?

Vancsó Ödön

Statisztika a középiskolai matematika oktatásban II. Bayes-statisztika

Az első cikkben [1], egy egyszerű döntési szituációt elemeztünk, a klasszikus statisztika módszerét bemutatva, valamint megismertük azokat az alapvető hibafajtákat, amelyekkel számolnunk kell, ha statisztikai döntéseket hozunk. Azzal fejeztük be, hogy eljárásunkat vizsgálva meg kellett állapítanunk: lényegében nem arra a kérdésre válaszoltunk, amit feltettünk. Most először azt nézzük meg, mi lehetett az oka, hogy mégis úgy elterjedt ez a megoldási módszer. Majd bemutatjuk azt a századunk első harmadának végén indult, de igazi lendületet mégis csak az utóbbi 20 évben kapott „konkurens" eljárást, amelyet Bayes-statisztika néven ismerünk. Az elnevezés onnan ered, hogy ebben a Bayes-tétel játsza a főszerepet.

Emlékeztetőül az első cikkben azt a problémát vizsgáltuk, hogy Sanyi azt állítja, ő sörszakértő, ezt pedig Jóska kétségbe vonja. Ennek eldöntésére kidolgoztunk egy tesztet, s egy bizonyos megengedhető hibahatár alatt elfogadtuk Sanyi szakértelmét, míg efölött Jóskának adtunk igazat, aki Sanyit hősködőnek tartotta. Úgy számoltunk, hogy feltettük, ismerjük Sanyi szakértelmét, amelyet a p biztonság jellemzett, s emellett megpróbáltuk kiszámítani, mekkora eséllyel tudja teljesíteni a tesztet, illetve milyen eséllyel nyer „véletlenül", ha $p = 0{,}5$. Igazából azonban a kérdés fordított, hiszen a teszt eredménye az, amit tényként ismerünk, s ebből kellene következtetni p-re. Miért tettünk mégis másként? A válasz az, hogy nemigen volt más lehetőségünk. Az eredeti kérdés tehát az, hogy ha S jelöli a tesztet, mint valószínűségi változót, s a konkrét eredményét pedig k, akkor vajon $P(H = p \mid S = k)$ vagy esetleg $P(H = p \mid S \geq k)$ mekkora, nem pedig az, amit mi számoltunk, ami a $P(S \geq k \mid H = p)$ valószínűség volt.

Miért cseréltük fel a két dolgot? Próbáljuk meg segítségül hívni a Bayes-tételt!

Az eredeti kérdés legyen $P(H = p \mid S \geq k)$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a lehetséges p-k száma diszkrét, vagy véges, tehát ne az egész (0, 1) valós intervallum legyen. Ez nem jelentős gyakorlati korlátozás, hiszen nem túl tartalmas kijelentés a szakértelmet pl. $\pi/4$-nek tekinteni. Lehet például a racionális számokra, vagy egyszerűen a 4 (k)-tizedesre meg-

adott 0 és 1 közötti valós számokra korlátozni magunkat. Az első esetben megszámlálhatóan végtelen, a másodikban véges sok esetünk van. Legyenek ezek valahogyan sorba rendezve x_i jelölje az i.-et! A kérdés tehát így átfogalmazva: $P(H = x_i \mid S = k)$=?. Most fogjuk alkalmazni a klasszikus Bayes-tételt a valószínűségszámításból. Lásd pl. (2)-ben a 288. oldalon.

$$P(H = x_i \mid S = k) = \frac{P(S = k \mid H = x_i) \cdot P(H = x_i)}{\sum_{i=1}^{\omega} P(S = k \mid H = x_i) \cdot P(H = x_i)}, \quad \text{ahol } \omega = \begin{cases} \infty, \text{ ha végtelen sok } i \\ \text{a véges sok } i \text{ száma} \end{cases}$$

S most már látjuk, mi a probléma. A szorzatok első tényezője az, amit ki lehet számolni, ezt tettük mi is [1]-ben, de a $P(H = x_i)$ eloszlásról nem tudunk semmit. S ezért nem alkalmaztuk ezt a formulát. A század 30-as éveiben azonban elsősorban L. J. Savage [3], és B. de Finetti [4] munkássága nyomán létrejött egy új megoldási lehetőség. Ezt fogjuk most vázolni.

Abból indulnak ki, hogy az esély, vagy valószínűség igazából csak a szubjektív tudásomat tükrözi, s a tanulásnak, fejlődésnek éppen az az alapja, hogy a tudásom, s ezzel a bizonyosság foka is állandóan változik. Hogyan segíthet ez a gondolat?

Induljunk ki valamilyen tapasztalás előtti eloszlásból, ami az eddigi tudásunkat, vagy tapasztalatainkat, előítéleteink stb. tükrözi. Nevezzük ezt **apriori-eloszlásnak** (Ez egy kicsit félreérthető, mivel ez a filozófiai műszó elsősorban Kant nyomán [5] úgy terjedt el, mint ami minden tapasztalást megelőz, esetleg magának a tapasztalásnak a lehetősége. Itt nem feltétlenül erről van szó, bár szélsőséges esetben előfordulhat, hogy tényleg semmit nem tudok a teszt előtt.).

Ezután fogjuk elvégezni a tesztet, amelynek eredményét jelöltük k-val. Vajon ennek hatására mi történik? Kapok egy új eloszlást a x_i számokra. Az új információ beépült. Ha most újra kísérletezek, akkor már ez lesz az apriori eloszlásom. A kérdés természetesen az, hogyan tudok ennek alapján dönteni. Nyilván ha a hipotézisem, ami most nem egy fix szám, hanem maga is egy valószínűségeloszlás – ez a módszer tulajdonképpeni lényege, az x számot magát is egy valószínűségi változónak tekintem, s így lehet elkerülni azt az információhiányt, ami miatt nem használták közel 200 évig ezt a módszert (Thomas Bayes angol szerzetes még 1763-ban közölte a róla elnevezett tételt (6].) –, nagyjából jó, akkor a kísérlet utáni új eloszlás nem fog gyökeresen eltérni az aprioritól.

Alkalmazzuk most ezt a mi problémánkra! Nyilván Sanyi egy olyan eloszlást feltételez magáról, amelynek várható értéke p, s ez el van tolódva az 1 irányába. Jóska inkább egy 1/2 körül koncentrálódó eloszlást tételez fel. Mindkét eloszlást meg fogja változtatni a kísérlet eredménye, s ahol a változás kisebb, az járt közelebb az „igazsághoz", hogy hétköznapian beszéljünk. Hogyan lehet most már ezt matematikailag precízebbé tenni? Vennünk kell valamilyen kiindulási, hipotetikus eloszlásokat, s megnézni, hogy hat rájuk egy $S = k$ kísérleti eredmény, ha a kísérletek száma 10, mint példánkban volt.

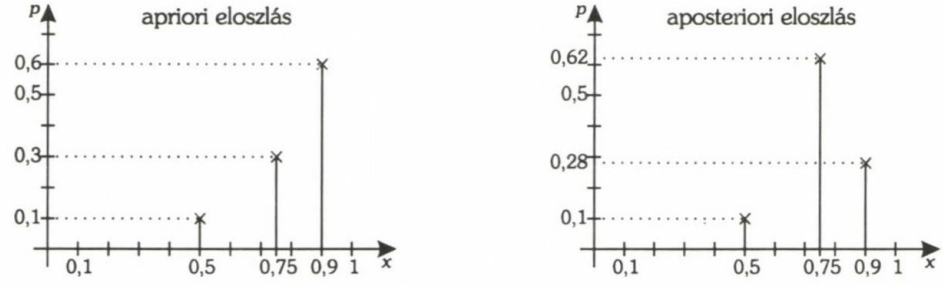
Legyen Sanyi eloszlás függvénye az egyszerűség kedvéért mindössze három pontra koncentrálva, a $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}75$; és az $x_3 = 0{,}9$ értékekre, mégpedig 0,1 0,3 és 0,6 súlyokkal. Ez azt jelenti, hogy 90 % eséllyel valamilyen szakértelemmel bír. Sanyi ezt fordítva képzeli, ő szerinte a $x_1 = 0{,}5$ esélye 0,8, míg $x_2 = 0{,}75$-é 0,2. A nagy szakértelmet előzetes tapasztalatai, és emberismerete alapján nem tudja elhinni.

Az első részben 7, 8 körüli küszöböket vettünk. Most nézzük meg először ezek a számok milyen aposteriori-eloszlásokat eredményeznek a két játékos számára!

Először legyen $S = 7$, s nézzük Sanyi aposteriori-eloszlását:

$$P(H=x_1)=\frac{\binom{10}{7}\cdot 0{,}5^{10}\cdot 0{,}1}{\binom{10}{7}\cdot 0{,}5^{10}\cdot 0{,}1+\binom{10}{7}\cdot 0{,}75^{7}\cdot 0{,}25^{3}+\binom{10}{7}\cdot 0{,}9^{7}\cdot 0{,}1^{3}\cdot 0{,}6}=0{,}0966,$$

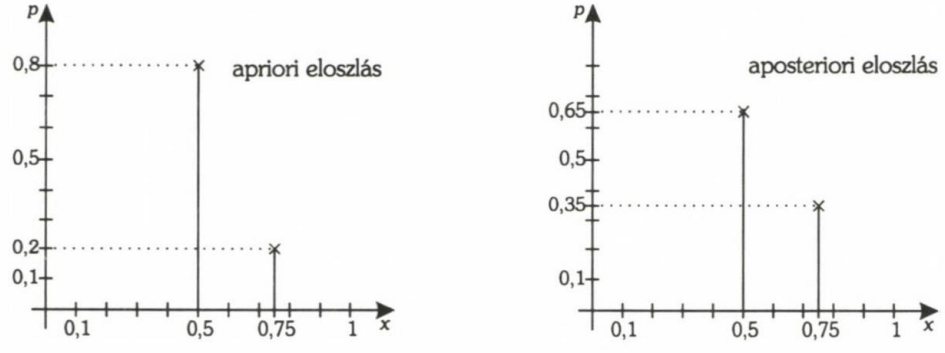
hasonlóan adódik $P(H=x_2)=0{,}6193$ $P(H=x_3)=0{,}2839$. Tehát lényegileg felcserélődött x_2 és x_3 szerepe. Azaz mégsem olyan jó szakértő, de a véletlen találat esélye egy csöppet kisebb lett. Lásd az 1. ábrát.



1. ábra

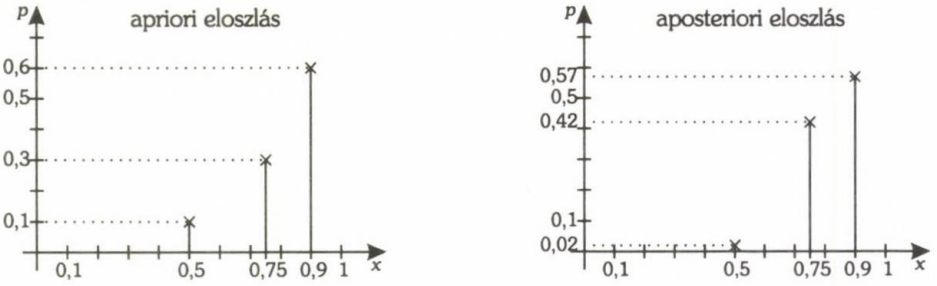
Ugyanez Jóska esetében egyszerűbb, mivel nála csak két tagot kell nézni:

$P(H=x_1)=0{,}65$; $P(H=x_2)=0{,}35$. Ez is jobbra tolódott, tehát nőtt a szakértelem esélye, bár még nem jelentősen, nem elég sok a tapasztalat, illetve a 7 nem „elég jó" eredmény. Lásd a 2. ábrát.



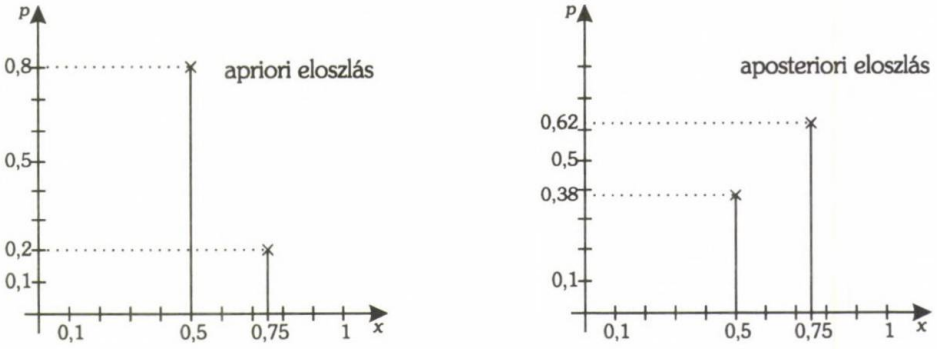
2. ábra

Ha Sanyi jobb eredményt ér el, akkor jelentősebben változhat a kép. Pl. 8 találat esetén Sanyi aposteriori eloszlása: $P(H=x_1)=0{,}021$; $P(H=x_2)=0{,}412$; $P(H=x_3)=0{,}567$ ami nagyon közel van az általa apriorinak mondott eloszláshoz, lásd a 3.ábrát.



3. ábra

Jóska esetében viszont lényegesen eltolódik az eredeti eloszlás, hiszen $P(H = x_1) = 0{,}384$; $P(H = x_2) = 0{,}616$ lesz az aposteriori (4.ábra), vagyis ekkor már inkább kell szakértést feltételezni, mint hősködést.



4. ábra

A szélsőséges 10 találatot nézzük még meg! Sanyi esetében adódik: $P(H = x_1) = 0{,}0043$; $P(H = x_2) = 0{,}0747$; $P(H = x_3) = 0{,}9248$, azaz az eloszlás teljesen a szakértelem felé tolódott, addig Jóska aposteriori eloszlása is most már gyökeres változáson megy keresztül, el kell ismernie, hogy Sanyi nyert. Az ő új eloszlása, ha továbbra is csak két értékre koncentrál: $P(H = x_1) = 0{,}065$; $P(H = x_2) = 0{,}935$, azaz szinte teljesen elveszett annak az alternatívának a lehetősége, hogy véletlenül találgat Sanyi.

Két fontos dolgot látunk tehát. A tapasztalat folyamatosan befolyásolja a helyzetről alkotott kezdeti képünket. Másrészt minél egyértelműbb eredmény adódik, annál jobban koncentrálódik az apriori eloszlás.

Természetesen mi a jobb áttekinthetőség kedvéért választottunk ilyen egyszerű kiinduló eloszlásokat. Bemutatunk ugyanerre a feladatra egy „folytonos" megoldást is, hogy lássuk, ekkor is működik az eljárásunk. Ezt a részt azok, akiket csak az elvek érdekelnek, vágy csak a középiskolai alkalmazhatóság szempontjait tartják szem előtt, nyugodtan átlapozhatják.

Folytonos eset:

Legyen most Sanyi és Jóska eloszlása ugyanolyan típusú, csak más paraméterrel: $f(p) = \lambda \cdot p^a \cdot (1-p)^b$ típusú, ahol a λ-t úgy kell megválasztani, hogy a (0,1) intervallumon az integrál értéke éppen 1 legyen, hiszen ez a feltétele, hogy egy eloszlás sűrűségfüggvényét írtuk fel. Különböző a és b értékek mellett vázoltuk az 5. ábrán az f sűrűségfüggvényt. A kérdés természetesen az, hogy fix a, b mellett ha elvégztünk ismét pl. 10 kísérletet, akkor a sikeres esetek k száma hogyan befolyásolja az aposteriori eloszlást. Ennek számolása már

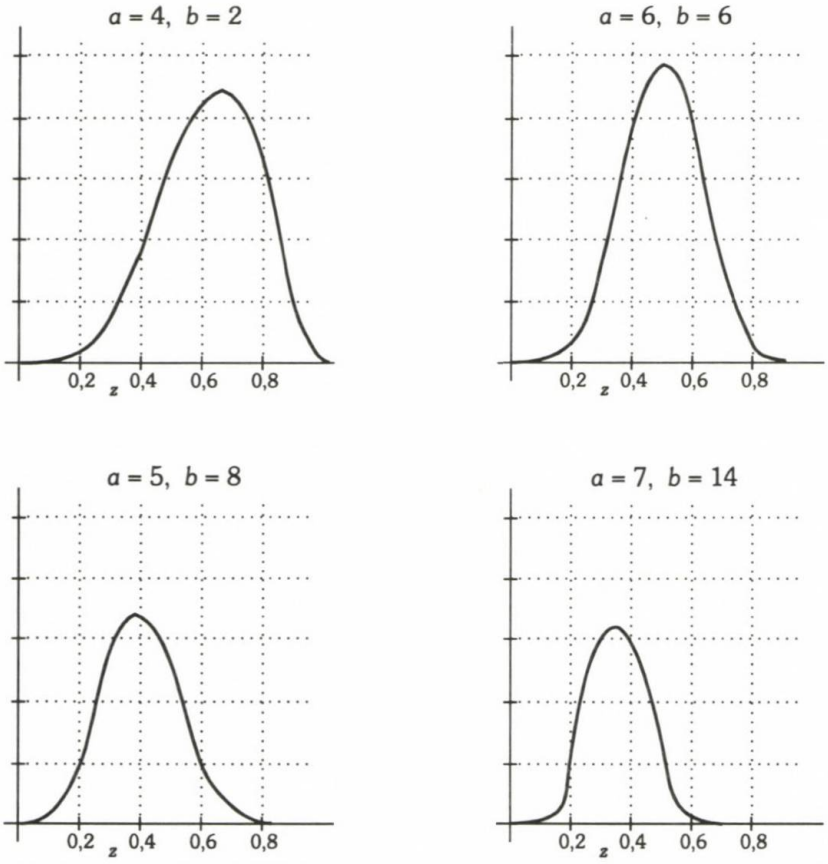
egy bonyolultabb feladat, s ezért nem ezzel kezdtük. Mindenképpen néhány analízisbeli ismeretre lesz szükségünk, elsőként számoljuk ki az f eloszlás várható értékét.

Ezt pontosan kiszámolni csak pozitív egész a és b mellett fogjuk tudni. Az analízisben Béta-fügvénynek hívják az alábbi a-tól és b-től függő integrált, lásd pl. [7] 178.oldalon:

$$B(a,b):=\int_0^1 p^{a-1}\cdot(1-p)^{b-1}\,dp.$$

Ennek az integrálnak az értékét, ha a és b pozitív egészek, pontosan ki lehet számolni, amit meg is fogunk tenni. Ezzel az új jelöléssel az apriori eloszlásunkban a λ konstans értékét is meg tudjuk határozni, mivel az eloszlás integrálja éppen a $B(a+1, b+1)$ értéket veszi föl, tehát

$$\lambda = 1/B(a+1, b+1).$$



5. ábra

A várható érték pedig a jól ismert módon:

$$\int_0^1 p\cdot\lambda\cdot p^a(1-p)^b\,dp = \lambda\cdot\int_0^1 p^{a+1}(1-p)^b\,dp =$$

$$= \frac{B(a+2,b+1)}{B(a+1,b+1)}.$$

Tehát ha ki tudjuk valahogy számolni a $B(a, b)$ értékeket, akkor meg van oldva a paraméter és a várható érték probléma. Hasonlóan a harmadik, s most egyben utolsó kérdésünk: a szórásnégyzet is megadható így a következőképpen, a jól ismert $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$ formulát használva:

$$\int_0^1 p^2 \cdot \lambda \cdot p^a \cdot (1-p)^b \, dp - \left(\frac{B(a+2, b+1)}{B(a+1, b+1)} \right)^2 =$$

$$\frac{B(a+3, b+1)}{B(a+1, b+1)} - \frac{B^2(a+2, b+1)}{B^2(a+1, b+1)}.$$

Nincs tehát más feladat, mint valahogyan $B(a, b)$ értékét meghatározni. Ennél lesz szükségünk arra a feltételezésre, hogy a és b pozitív egészek. Ha nem, akkor a Γ függvényt is be kellene vezetnünk, de nem akarjuk jobban komplikálni a helyzetet, mint elkerülhetetlen. Lényegében csak a parciális integrálást fogjuk használni. Induljunk ki az első kérdésből, λ meghatározásához kell $B(a+1, b+1)$ értéke:

$$B(a+1, b+1) = \int_0^1 p^a \cdot (1-p)^b \, dp =$$

$$= \left[-\frac{1}{b+1} \cdot (1-p)^{b+1} \cdot p^a \right]_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{a}{b+1} p^{a-1} \cdot (1-p)^{b+1} \, dp$$

ahol az $\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$ formulát használtuk $f(p) = p^a$, és $g(p) = -\frac{1}{b+1} \cdot (1-p)^{b+1}$ szereposztással.

Mivel $\left[-\frac{1}{b+1} \cdot (1-p)^{b+1} \cdot p^a \right]_0^1 = 0$, ezért $B(a+1, b+1) = \frac{a}{b+1} \cdot B(a, b+2)$. Ez az összefüggés igaz minden a, b esetén. Ha azonban legalább a egész, akkor ezt az eljárást iterálva el tudunk jutni $B(1, b+a+1)$-hez ami viszont közvetlentll kiszámítható, hiszen:

$$B(1, b+a+1) = \int_0^1 p^0 \cdot (1-p)^{b+a} \, dp =$$

$$= \int_0^1 (1-p)^{b+a} \, dp = \left[-\frac{1}{b+a+1} \cdot (1-p)^{b+a+1} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{b+a+1}.$$

Az viszont a rekurzióból könnyen kijön, hogy:

$$B(a+1, b+1) = \frac{a}{b+1} \cdot B(a, b+2) =$$

$$= \frac{a \cdot (a-1)}{(b+1) \cdot (b+2)} \cdot B(a-1, b+3) = \ldots =$$

$$= \frac{a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(b+1)(b+2) \ldots (b+a)} \cdot B(1, b+a+1) =$$

$$\frac{a!}{(b+1)(b+2) \ldots (b+a)(b+a+1)} = \frac{a! \cdot b!}{(b+a+1)!}.$$

Tehát ha a és b pozitív egészek, akkor $B(a+1, b+1) = \frac{a! \cdot b!}{(b+a+1)!}$. Eszerint tehát $\lambda = \frac{(b+a+1)!}{a! \cdot b!}$. Hasonlóan ha Π jelöli az apriori eloszlást, amelynek s sűrűségfüggvénye volt az általunk megadott $f(p) = \lambda \cdot p^a \cdot (1-p)^b$ kifejezés, akkor

$$E(\Pi) = \frac{B(a+2, b+1)}{B(a+1, b+1)} =$$

$$= \frac{(a+1)! \cdot b!}{(b+a+2)!} \cdot \frac{(b+a+1)!}{a! \cdot b!} = \frac{a+1}{b+a+2}.$$

Eredményünk szerint ha az egyenletes eloszlásból indulunk ki, tehát $a = b = 0$, akkor a várható érték természetesen $1/2$, amint ezt tudjuk, ez egy egyszerű kontrollja csupán számításunknak. Nézzük még meg, mi adódik a szórásranégyzetre.

$$D^2(\Pi) = \frac{B(a+3, b+1)}{B(a+1, b+1)} - \frac{B^2(a+2, b+1)}{B^2(a+1, b+1)} =$$

$$= \frac{(a+2)! \cdot b!}{(a+b+3)!} \cdot \frac{(a+b+1)!}{a! \cdot b!} - \frac{(a+1)^2}{(b+a+2)^2} =$$

$$= \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+3)(a+b+2)} - \frac{(a+1)^2}{(b+a+2)^2} =$$

$$= \frac{a+1}{a+b+2} \cdot \left(\frac{a+2}{a+b+3} - \frac{a+1}{a+b+2} \right) =$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2(a+b+3)}.$$

Itt is tehetünk egy próbát az egyenletes eloszlással, $a = b = 0 \Rightarrow D^2(\Pi) = \frac{1}{12}$ adódik, ami szintén jól ismert eredmény.

Az igazi kérdés azonban most jön. Ha egy n-szer megismételt kísérletben a sikeres esetek száma k, akkor hogyan alakul az aposteriori eloszlás, jelöljük $\hat{\Pi}$-val.

A Bayes-formula szerint:

$$\hat{f}(p) = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot f(p)}{\int_0^1 \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot f(p)dp}.$$

A mi esetünkben a következő adódik:

$$\hat{f}(p) = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^a \cdot (1-p)^b}{\int_0^1 \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^a \cdot (1-p)^b dp} =$$

$$= \frac{p^{k+a} \cdot (1-p)^{n-k+b}}{\int_0^1 p^{k+a} \cdot (1-p)^{n-k+b} dp} = \frac{p^{k+a} \cdot (1-p)^{n-k+b}}{B(a+k+1, b+n-k)}$$

azaz ismét egy B-eloszlás, csak $a+k$, $b+n-k$ paraméterekkel. Emiatt könnyű lesz az új várható értéket, és szórásnégyzetet kiszámítani:

$$E(\hat{\Pi}) = \frac{B(a+k+2, b+n-k+1)}{B(a+k+1, b+n-k+1)} =$$

$$= \frac{(a+k+1)! \cdot (b+n-k)!}{(b+a+n+2)!} \cdot \frac{(b+a+n+1)!}{(a+k)! \cdot (b+n-k)!} =$$

$$= \frac{a+k+1}{a+b+n+2}.$$

Azaz, ha eredetileg semmilyen feltételezésem nem volt, és egyenletes eloszlásból indultam, akkor nem pont k/n lesz a várható érték, hanem egy kicsit más $(k+1)/(n+2)$. Ha elég sok kísérletet végzek, akkor eltűnik a számláló és a nevező második tagjainak hatása. Ez általában is igaz, ha a és b fix konstansok, akkor előbb-utóbb a kísérletszám növekedésével $a+1$, és $a+b+2$ is elhanyagolható lesz k és n mellett. Ez lényegében a nagy számok törvényét hordozza ebben az esetben, a várható érték konvergál sztochasztikusan k/n-hez. Ezt garantálja, hogy a szórás viszont n növekedtével 0-hoz tart. Ezt is számoljuk ki:

$$D^2(\hat{\Pi}) = \frac{B(a+k+3, b+n-k+1)}{B(a+k+1, b+n-k+1)} - \frac{B^2(a+k+2, b+n-k+1)}{B^2(a+k+1, b+n-k+1)} =$$

$$= \frac{(a+k+2)! \cdot (b+n-k)!}{(a+b+n+3)!} \cdot \frac{(a+b+n+2)!}{(a+k)! \cdot (b+n-k)!} = -\frac{(a+k+1)^2}{(a+b+n+2)^2} =$$

$$= \frac{(a+k+2)(a+k+1)}{(a+b+n+2)(a+b+n+3)} - \frac{(a+k+1)^2}{(a+b+n+2)^2} = \frac{(a+k+1)}{(a+b+n+2)} \cdot \left(\frac{a+k+2}{a+b+n+3} - \frac{a+k+1}{a+b+n+2} \right) =$$

$$= \frac{(a+k+1)(b+n-k+1)}{(a+b+n+2)^2(a+b+n+3)}.$$

Ha most az n-től való függést szeretnénk jobban látni, akkor érdemes n^2-tel végigosztani az eredményünket. Ekkor kapjuk a következőt:

$$D^2(\hat{\Pi}) =$$

$$= \frac{\left(\frac{a+1}{n}\right)\left(\frac{b+1}{n} + \left[1 - \frac{k}{n}\right]\right)}{\left(1 + \frac{a+b+2}{n}\right)\left(1 + \frac{a+b+3}{n}\right)(a+b+2+n)},$$

ha most n elég nagy, akkor a következő közelítést adhatjuk:

$$D^2(\hat{\Pi}) = \frac{\frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)}{n}, \quad \text{azaz} \quad \sigma = \frac{\sqrt{\frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)}}{\sqrt{n}}$$

ami lényegében a relatív gyakoriság szórása, ha n kísérletet végzünk. Azaz határesetben a sok kísérlet eredménye az eredeti vélemé-

nyünket teljesen átalakítja, bármilyen a és b kezdeti paraméterrel indultunk. Ha azonban nincs sok kísérlet, akkor a kezdeti feltételezésnek még jelentékeny hatása lehet.

Ha kezdetben is van már egy feltételezésünk, akkor ez befolyásolja az aposteriori eloszlást, amely ilyenkor is B-eloszlás lesz, de a várható értéke nem egyszerűen k/n hanem $(a+k+1)/(a+b+n+2)$. Ha nagyon sok kísérletet végzünk, akkor előbb utóbb k és n mellett a kezdeti konstans $a+1$ és $b+2$ is elhanyagolható lesz, így eredményünk szerint lassan elvész a kezdeti információ az új tapasztalatok mellett. Ez is teljesen megfelel az elvárásainknak.

Tehát ez a módszer jól modellezi a tanulási folyamatot, s határesetekben hasonló eredményt ad, mint a „klasszikus módszer". Mégis alapvetően más fogalmi háttér van a két felfogás mögött. Erről szeretnénk a következő részben írni, nevezetesen a két eljárás összehasonlításáról, s egy kicsit a filozófiai háttérről. Addig ajánlható olvasásra [8].

Irodalom

[1] Vancsó Ödön: Statisztika a középiskolai matematika oktatásban I. Matematika Tanitása 1994.

[2] Nemetz Tibor: Valószínűségszámítás Tankönyvkiadó 1988

[3] L. J. Savage: The Foundation of Statistics Wiley New York 1954

[4] B. de Finetti: Foundation of Probability Theory Oldenburg Verlag Wien M Unchen 1981

[5] I. Kant: A tiszta ész kritikája Gondolat 1981

[6] Thomas Bayes: An Essay Towards Solving a Problem in the Doktrine of Chances Phil. Transact. of the Royal Statistical Society 53 (1763) 370-418.

[7] J. Naas-H.L. Schmid: Mathematisches Wörterbuch Akademie Verlag Berlin-Stuttgart 1974

[8] V. Barnett: Comperative Statistical Inference Wiley New-York 1973

Popovici Florin - Bencze Mihály

Egy mértani szélsőérték feladatról

Cikkünkben a következő feladatot általánosítjuk és bemutatjuk alkalmazásait:

C:761-es feladat: (Lascu M., Neacsu C. Gazeta Matematica, 2/1988)

Legyen ABC egy háromszög a $\mathbf{P}$ síkban, és $f:\mathbf{P}\to\mathbb{R}$ a következő függvény $f(X)=(p-a)AX^2+(p-b)BX^2+(p-c)CX^2$, ahol p a háromszög kerülete. Határozzuk meg $\min\{f(X)\mid X\in\mathbf{P}\}$ értékét és azon $X\in\mathbf{P}$ pontot amelyre ez teljesül.

A feladatot a következőképpen általánosítjuk:

Legyen ABC egy háromszög a $\mathbf{P}$ síkban, és $f:\mathbf{P}\to\mathbb{R}$, ahol $f(X)=u_1AX^2+u_2BX^2+u_3CX^2$, $u_1, u_2, u_3>0$. Határozzuk meg $\min\{f(X)\mid X\in P\}$ értékét, valamint azt a pontot amelyre ez teljesül.

1. Megoldás (szintétikus)

Felhasználjuk Leibniz következő általánosított tételét (lásd [1]): Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és $P\in\mathrm{Int}(ABC)$, valamint $\{A_1\}=AP\cap BC$, $\{B_1\}=BP\cap AC$, $\{C_1\}=CP\cap AB$. Bevezetjük a következő jelöléseket: $PA_1/AA_1=\alpha$, $PB_1/BB_1=\beta$, $PC_1/CC_1=\gamma$. Ha M a tér tetszőleges pontja, akkor $MP^2=\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2-\alpha\beta AB^2-\beta\gamma BC^2-\gamma\alpha CA^2$. (1.)

Legyen $f(X) = u_1AX^2 + u_2BX^2 + u_3CX^2 = (u_1 + u_2 + u_3)(\alpha AX^2 + \beta BX^2 + \gamma CX^2)$, ahol $\alpha = u_1/(u_1 + u_2 + u_3)$, $\beta = u_2/(u_1 + u_2 + u_3)$, $\gamma = u_3/(u_1 + u_2 + u_3)$ és így $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (2.).

Most igazoljuk, hogy léteznek egyértelműen meghatározott AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-féle egyenesek, úgy, hogy $\{P\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$, $A_1P/AA_1 = \alpha$, $B_1P/BB_1 = \beta$, $C_1P/CC_1 = \gamma$. Legyenek $BA_1/CA_1 = k_1$, $CB_1/AB_1 = k_2$, $AC_1/BC_1 = k_3$. Felhasználva Van Aubel tételét az első három összefüggést kapjuk, míg a Ceva tételéből az utolsó összefüggést kapjuk:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\alpha} = k_3 + 1/k_2 \\ \dfrac{1-\beta}{\beta} = k_1 + 1/k_3 \\ \dfrac{1-\gamma}{\gamma} = k_2 + 1/k_1 \\ k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1 \end{cases} \qquad (3.)$$

A létezésnek az a feltétele, hogy a fenti egyenletrendszernek a k_1, k_2, k_3 változókra egy megoldása legyen. Megoldva az egyenletrendszert a következő megoldásokat kapjuk: $(k_1, k_2, k_3) = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}, \dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$. Tételezzük fel, hogy k_1', k_2', k_3' is egy más megoldás. Ha $k_1 = k_1'$ akkor következik, hogy $k_2 = k_2'$ és $k_3 = k_3'$. Ha $k_1 < k_1'$ akkor következik, hogy $k_2 < k_2'$ és $k_3 < k_3'$, ami ellentmondáshoz vezet, mert: $k_1k_2k_3 = 1 = k_1'k_2'k_3'$. Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $(k_1, k_2, k_3) = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}, \dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$. Az így meghatározott AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-féle egyenesekre alkalmazzuk a fentiekben bemutatott általánosított Leibniz-féle tételt. Azt kapjuk, hogy $f(X) = (u_1 + u_2 + u_3)(XP^2 + \alpha\beta\, AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2)$ és így:

$$\min\{f(X) \mid X \in \mathbf{P}\} = f(P) = \frac{1}{u_1 + u_2 + u_3}(u_1u_2AB^2 + u_2u_3BC^2 + u_3u_1CA^2).$$

Ezt a pontot a (3.)-as egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg.

2. Megoldás (analítikusan):

Legyen $x \circ y$ egy derékszögű koordinátarendszer a $\mathbf{P}$ síkon. $A = (\alpha_1, \alpha_2)$, $B = (\beta_1, \beta_2)$, $C = (\gamma_1, \gamma_2)$, $X = (x_1, x_2)$, akkor $f(X) = F(x_1, x_2) = u_1((x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2) + u_2((x_1 - \beta_1)^2 + (x_2 - \beta_2)^2) + u_3((x_1 - \gamma_1)^2 + (x_2 - \gamma_2)^2) = a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 + a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2$, ahol $a_1, a_2 > 0$. Felhasználva a másodfokú trinom kanonikus alakját:

$$f(X) = a_1\left(x_1 + \frac{b_1}{2a_1}\right)^2 + a_2\left(x_2 + \frac{b_2}{2a_2}\right)^2 - \frac{\Delta_1}{4a_1} - \frac{\Delta_2}{4a_2}$$

A $P = (p_1, p_2) = \left(-\dfrac{b_1}{2a_1}, -\dfrac{b_2}{2a_2}\right) = \left(\dfrac{u_1\alpha_1 + u_2\beta_1 + u_3\gamma_1}{u_1 + u_2 + u_3}, \dfrac{u_1\alpha_2 + u_2\beta_2 + u_3\gamma_2}{u_1 + u_2 + u_3}\right)$ pontban van a függvény minimuma.

A függvény minimumértéke pedig $f(P) = -\frac{\Delta_1}{4a_1} - \frac{\Delta_2}{4a_2} = \frac{1}{u_1+u_2+u_3}(u_1u_2AB^2 + u_2u_3BC^2 + u_3u_1AC^2)$. Mivel $p_1 = \frac{u_1}{u_1+u_2+u_3}\alpha_1 + \frac{u_2+u_3}{u_1+u_2+u_3}\left(\frac{u_2}{u_2+u_3}\beta_1 + \frac{u_3}{u_2+u_3}\gamma_1\right)$; s hasonlóan p_2 is ezért P az A és A_1 pontok lineáris kombinációja, ahol $A_1 = \left(\frac{u_2}{u_2+u_3}\beta_1 + \frac{u_3}{u_2+u_3}\gamma_1, \frac{u_2}{u_2+u_3}\beta_2 + \frac{u_3}{u_2+u_3}\gamma_3\right)$. Mivel AA_1 szakasz a B és C pontok lineáris kombinációja, ezért P a BC oldalon van.

Így $BA_1/A_1C = k_1 = \frac{u_3}{u_2+u_3} \cdot \frac{u_2+u_3}{u_2} = \frac{u_3}{u_2}$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $P \in BB_1$ és $P \in CC_1$.

Ezért felírhatjuk, hogy $k_1k_2k_3 = 1$, mert $CB_1/B_1A = k_2 = \frac{u_1}{u_3}$ és $AC_1/C_1B = k_3 = \frac{u_2}{u_1}$. Ez azt jelenti, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-féle egyenesek összefutóak a $\{P\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$ pontban.

1. alkalmazás: Ha $P = N$ a Nagel pont, akkor $f(X) = (p-a)AX^2 + (p-b)BX^2 + (p-c)CX^2$ és visszakapjuk a C.761-es feladatot.

2. alkalmazás: Ha $P = \Gamma$ a Gergonne pont, akkor $f(X) = (p-b)(p-c)AX^2 + (p-a)(p-c)BX^2 + (p-a)(p-b)CX^2$.

3. alkalmazás: Ha $P = H$ az ortocentrum, akkor $f(X) = (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)AX^2 + (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)BX^2 + (a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)CX^2$.

4. alkalmazás: Ha $P = O$ a háromszög köré írt kör középpontja, akkor $f(X) = b^2c^2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)AX^2 + a^2c^2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)BX^2 + a^2b^2(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)CX^2$.

4. alkalmazás: Ha P a k-ad rangú Ceva-féle egyenes összefutási pontja, akkor $f(X) = a^kAX^2 + b^kBX^2 + c^kCX^2$.

Speciális esetek:

5.1. $k = 0$, $P = G$ a súlypont, akkor $f(X) = AX^2 + BX^2 + CX^2$.

5.2. $k = 1$, $P = I$ a háromszögbe írt kör középpontja, akkor $f(X) = aAX^2 + bBX^2 + cCX^2$.

5.3. $k = 2$, $P = K$ a Lemoine-féle pont, akkor $f(X) = a^2AX^2 + b^2BX^2 + c^2CX^2$.

5.4. $k = 3$, P az izogonális ellenszögfelezők összefutási pontja, akkor $f(X) = a^3AX^2 + b^3BX^2 + c^3CX^2$.

A feladat kiterjeszthető a térbe is a következőképpen: Legyen ABC a tér egy tetszőleges háromszöge, valamint $f : S \to \mathbb{R}$, ahol $f(X) = u_1AX^2 + u_2BX^2 + u_3CX^2$, ahol $u_1, u_2, u_3 > 0$. Határozzuk meg $\min\{f(X) \mid X \in S\}$ értékét, és azt a pontot amelyre ez teljesül.

Irodalom

[1] Bandila V.: O generalizare a unei relatii a lui Leibniz si aplicarea ei la calculul distantelor dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi, Gazeta Matematica, 2/1985.

[2] Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek, Kolozsvár, 1988.

Mohay Péter

Matematikatörténet és ismeretelmélet a matematikatanításban

- beszámoló egy nemzetközi matematikatanári konferenciáról -

A címben megadott témában 1993. július 19-24-ig a dél-franciaországi Montpellier-ben Európai Nyári Egyetemet rendeztek. Csaknem 300 matematikatanár érkezett ebbe a kellemes hangulatú, napsütötte egyetemi városba, a résztvevők fele Franciaországból, a másik fele mintegy 20 európai országból, de jöttek észak-afrikai és észak-amerikai államokból is. Magyarországról egyedül vehettem részt ezen a konferencián, ahol a matematikatanítás olyan jellegű didaktikai kérdéseiről volt szó, amelyek nálunk ritkán merülnek fel.

Franciaországban kiterjedt, jól működő hálózatot alkotnak az egyetemek irányítása alá tartozó Matematikatanítási Kutatóintézetek (Institut sur la Recherche de l'Enseignement des Mathématiques: IREM), amelyek egyik fő tevékenységi területe a középiskolai matematikatanítás folytonos megreformálása. Ezen belül 15 éve dolgozik az a matematikatörténettel foglalkozó (szintén az egész országra kiterjedő) csoport, amely ezt a nyári egyetemet is rendezte, és amely az utóbbi években egyre szembetűnőbb eredményeket tudott fölmutatni annak bizonyítására, hogy a matematikatanítás hogyan tehető hatékonyabbá a történeti elemek bevonásával.

Az igen tartalmas és gazdag programokban bővelkedő hét elteltével elmondhattuk, hogy a konferencia elérte céljait:

- a matematika kultúrtörténeti megközelítéséből kiindulva nemzetközi szintű együttgondolkodást tett lehetővé a matematikatanításról;
- olyan pedagógiai eszközök és módszerek feltárásában segített, amelyek alkalmazásával több tanuló számára lehetővé teszi majd, hogy a matematikához és a tudományos kultúrához közelebb kerüljenek;
- a résztvevők összehasonlíthatták a különböző országokban folyó pedagógiai újításokat, azt vizsgálva, hogy a tanításban mennyire nyújtanak történeti hátteret;
- tájékozódhattunk, hogy az egyes országok tanárképzési rendszerében hogyan próbálják a matematika történeti megközelítését bevezetni;
- a konferencia az európai tanárok számára a későbbi együttműködési lehetőségek megalapozásában, érdeklődés szerinti csoportok kialakulásában is segített.

A programok a következő 4 csoportra voltak oszthatók:

1. Plenáris előadások (4),
2. Szűkebb körű előadások, ezekből egyidőben 8-10 folyt (összesen 38 volt), és ki-ki érdeklődésének megfelelően választhatott.
3. Szemináriumok (az előbbi rendszerben, összesen 47) a jelen levők aktív (esetenként alkotó) részvételével.
4. Két „kerekasztalt" is rendeztek, amikor is 8 ország egy-egy neves szakembere adott tájékoztatást, majd folytatott párbeszédet a nagyszámú hallgatósággal.

Ezeken kívül természetesen számtalan lehetőség nyílt kötetlen eszmecserékre, beszélgetésekre.

Milyen szerepet tölthet be valójában a matematika történeti megközelítése a tanításban? Anélkül, hogy ennek megválaszolásán ezen rövid cikk keretében hosszabban elgondolkodnánk, lényeges megemlíteni, hogy itt nem arról van szó, hogy az órán a szóba

kerülő matematikusok szakmai munkásságáról beszélünk, vagy a tananyagot ,,A matematika története'' c. fejezettel bővítjük, hanem arról, hogy a tanulók gondolkodásának fejlesztéséhez, a tanulás során az egyes matematikai fogalmak kialakításához hogyan járulhat hozzá a történeti háttér. Ez nem elsősorban tanári magyarázattal érhető el, hanem a diákok önálló munkáik, felfedezéseik (pl. forrásmunkák feldolgozása jól megválasztott szempontok szerint) során juthatnak el oda, hogy jobban megértik a matematikát, és ez azt jelenti, hogy életszerűbb, emberközelibb lesz számukra. Elvontsága vagy ennek látszata ugyanakkor mérséklődik.

Nehéz megítélni, hogy a matematikatörténetnek a tanórákon való (esetleg indirekt) megjelenésével a tanítás valóban hatékonyabbá válik-e. A válasz nagymértékben függ a tanár által alkalmazott módszerektől, a tanulótól, adottságaitól és személyiségétől. Lesz, aki számára ,,csak'' hasznosabbá vagy érdekesebbé válnak ezek az órák (de már ekkor is megérte). A nyári egyetem tapasztalatai azonban meggyőztek arról, hogy sok diák számára érthetőbb és barátságosabb tárggyá válik a matematika. Nem mellékes ugyanakkor tanulóink kultúrtörténeti ismereteinek gyarapodása sem. Hallhattunk például néhány érdekesebb előadást arról, hogy amikor a diákok már könyvtárhasználattal együttjáró, nagyobb fokú önálló munkára képesek, akkor miféle komplex feladatokat kaphatnak. Ezekben a matematikatörténet úgy jelenik meg, mint összekötő lánc más tudományok (fizika, filozófia, történelem, sőt anyanyelv) és a matematika között.

Az előadások és szemináriumok mind megannyi lehetőséget biztosítottak, hogy mélyebb részletekben is elmerüljünk. Néhány példát említek: A görbe fogalma a XVII.században; Az algebrai fogalmak fejlődése a III. sz.-tól a XIV. sz.-ig; Gauss és a komplex számok bevezetése; A folytonosság fogalma; Matematika és metafizika Leibniznél; A számfogalom az analitikus tudományosság megszületése előtt; Forrásmunkák feldolgozásának módja a középiskolában; A geometria tanítása egykoron használt eszközök segítségével; Az abszolútérték története és didaktikai vonatkozásai. De szólhatnék azokról is, amelyek az egyes országokban folyó azon konkrét kísérletekről, próbálkozásokról, eredményekről számoltak be, amelyek több matematikatörténetet igyekeznek ,,becsempészni'' a tantervekbe, legyen szó középiskoláról vagy tanárképző intézményről. Ebből a szempontból meglehetősen vegyes a kép Európában. Angliában, Dániában, Hollandiában, Franciaországban összehangoltabb, célirányosabb munkát végeznek ezen a területen, Belgiumban,Olaszországban, Görögországban, Portugáliában már sokan fölismerték ennek szükségességét, Ausztria, Norvégia, Svédország pedig még inkább csak tájékozódik a lehetőségekről. Nekünk, matematikatanároknak, Magyarországon is érdemes elgondolkodnunk azon, hogy a matematikatörténet megjelenítésével hogyan tehetjük óráinkat színesebbé, hogyan hozhatjuk a matematikát diákjainkhoz közelebb. Ebből a szempontból igen jónak tartom, hogy Hajnal Imre 1988-tól megjelent gimnáziumi tankönyvsorozatában ilyen jellegű szövegrészek is találhatók. De ötleteket meríthetünk Sain Márton átfogó matematikatörténeti munkájából (Nincs királyi út), egyéb könyvekből, illetve helyi könyvtárakban fellelhető esetleges korabeli kiadványokból.

Végül néhány szót a rendezvény lebonyolításáról. A nyári egyetem hivatalos nyelve a francia és az angol volt, az előadások nagyobb része azonban csak franciául folyt. Minthogy a jelenlevők többsége mindkét nyelvet beszélte, így nyelvi kommunikációs zavarok egyáltalán nem fordultak elő. Kitűnően szerveztek meg mindent, és a házigazdák igyekeztek mindig mindenkinek nagy türelemmel a kedvében járni. Esténként kulturális programokon vehettünk részt, a végén pedig egy egész napos autóbuszos kiránduláson. Ennek keretében bejártuk a Cévennes hegység egyedülálló természeti szépségeit, meglátogattunk egy gyönyörű cseppkőbarlangot (grotte de Clamouse) és egy középkori falucskát (Saint Guilhem-le-Désert) XI. századi apátságával.

A tervek szerint a II. Európai Nyári Egyetemet ugyanebben a témában Portugáliában rendezik 1996-ban. Az érdeklődő (angolul vagy franciául beszélő) kollégákkal szívesen fölvenném a kapcsolatot.

HÍREK VERSENYEKRŐL

Számválaszos verseny 1994.

1. A négyzetrácson adott egy 10×15-ös rácstéglalap, oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. Hány ilyen típusú téglalap létezik, ha csúcsai az adott téglalap határán vagy belsejében elhelyezkedő rácspontok közül kerülnek ki?

2. Hány olyan néggyel osztható négyjegyű szám van, amelyek jegyei között nincs 5-nél nagyobb?

3. Egy műhold a (gömbalakú) Föld egyenlítője körül kering egyenletes sebességgel. Pályája az egyenlítővel koncentrikus kör, sugara a földsugár kétszerese. Egy egyenlítőn üldögélőnek feltűnik, hogy a hold pont kétóránkét jelenik meg a látóhatár ugyanazon pontján. Hány percig van a hold a látóhatár felett?

4. P az ABC szabályos háromszög köré írt kör kisebbik AC ívének egy pontja. $PA=2$, $BP=14$. Mekkora PC?

5. Az a, b, c, x, y, z olyan valós számok, amelyekre $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Mekkora $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$?

6. Adjuk meg azt a legnagyobb p prímszámot, amelyre p^2+8 is prímszám.

7. A 10-es sugarú körbe szabályos ötszöget írunk, ebbe viszont érintőkört. Mekkora az érintőkörbe írt szabályos tízszög oldala?

8. Az a, b, c, d pozitív egészek, melyekre $a = 1994$, $ab = cd$ teljesül. Határozzuk meg az $(a, c) \cdot (a, d) : (a, b, c, d)$ hányados értékét; a zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli.

9. A hegyesszögű ABC háromszögben $A\sphericalangle = 30$, az A-ból induló magasság hossza 19. Mekkora a háromszögbe írt legkisebb kerületű háromszög kerülete?

10. Mi az $(1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$ függvény maximuma?

11. Egy kör középpontja O, sugara 12, két, egymásra merőleges átmérője AB és CD. OC felezőpontja E, az AE egyenes a kört F-ben is metszi, FD és AB metszéspontja G. Mekkora OG?

12. Az $\{a_n\}$ sorozatot az $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1}a_{n+1} - 1$ $(n > 1)$ rekurzióval értelmezzük. Mekkora a sorozat első ezer tagjának az összege?

13. Az $F(x) = ax^2 + bx + c$ polinomra a $[0, 1]$ intervellumban $|F(x)| \leq 1$ teljesül. Mekkora $|a| + |b| + |c|$ maximuma?

14. Az első ezer pozitív egész között melyik az a legnagyobb, amelyre

$$3^{(n+1)(n+2)} + 63$$

osztható 72-vel?

15. Egy végtelen sakktáblán a következő játékot játsszuk: A kiinduló állásban n^2 bábu van elhelyezve a sakktáblán egy szomszédos mezőkből álló $n \times n$-es négyzetben, minden mezőn egy bábu áll. A játék egy lépése abban áll, hogy amennyiben egy bábu mellett vízszintes vagy függőleges irányban a közvetlen szomszédos mezőn áll bábu, a rákövetkező mező pedig üres, a bábu átugorja a szomszédos mezőn álló bábot, és az üres mezőre érkezik. Az átugrott bábot ezután levesszük a tábláról. Határozzuk meg az első 1994 pozitív egész között azt a legnagyobb n értéket, amelyre nem érhető el a fenti eljárással, hogy végül csak egy bábu maradjon a táblán!

Minden feladat eredménye egész szám, ezt kérjük a feladat melletti keretbe beírni; a megoldásból mást beírni nem szabad. Semmilyen segédeszköz (pl. számológép) sem használható. Ha a feladat erről külön nem szól, akkor a szereplő változók valós számok.

A feladatok megoldására fordítható idő: 90 perc.

Az egyes feladatok helyes végeredménye

1. *6600;*	**4.** *12;*	**7.** *5;*	**10.** *36;*	**13.** *17;*
2. *270;*	**5.** *1;*	**8.** *1994;*	**11.** *4;*	**14.** *1000;*
3. *40;*	**6.** *3;*	**9.** *19;*	**12.** *1800;*	**15.** *1992;*

A feladatokat Reiman István állította össze.

A tanárképző főiskolák 1994. évi országos Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

A versenyt az ELTE Tanárképző Főiskolai Kara Matematika Tanszéke rendezte.

1. Igazoljuk, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből készíthető, csupa különböző számjegyekből álló hétjegyű számok között nincs kettő olyan, amelyek közül egyik osztója a másiknak!

2. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a $P(x; y; z)$ pontoknak a halmaza a térben, amelyekre a következő két egyenlőség igaz:

$$x + y + z = 6,$$
$$xy + yz + zx = 11,$$

kör! Mekkora a kör sugara?

3. Igazoljuk, hogy az

$$x = (\ln x)^k$$

egyenletnek, (ahol $k > 3$, egész) az $x > 1$ számok körében pontosan két megoldása van: $u_k < v_k$, és mutassuk meg, hogy

$$\lim_{k \to \infty} u_k = e,$$

továbbá

$$\lim_{k\to\infty} v_k = +\infty!$$

(ln x jelöli az x természetes, e alapú logaritmusát.)

4. A, B és C teniszeznek, egyes mérkőzéseket játszanak, döntetlen nincs. A és B kezdi a játékot, a következő játékban mindig a vesztes pihen.
Ha végül A 10 meccset nyert, B 15-öt, C pedig 17-et, akkor ki veszítette el az utolsó meccset és hányszor játszott egymással A és B?

5. Bizonyítsuk be, hogy az 54-oldalú szabályos sokszögnek van négy olyan átlója, amelyek a sokszög belsejében egy ponton mennek át és nem illeszkedik a sokszög szimmetria centrumára!

6. Adott a síkon n (≥ 4) egyenes, amelyek közül bármelyik kettő metszi egymást és semelyik pontosan sem halad át 3 egyenes. Ezek az egyenesek a síkot feldarabolják nem korlátos tartományokra és sokszögekre. Igazoljuk, hogy a keletkezett sokszögek között legalább $\frac{2n-2}{3}$ háromszög van! Általánosítsuk a feladatot a térre!

7. Igazoljuk, hogy egy 1-nél nagyobb szám, akkor és csak akkor prím, ha $\varphi(n) \mid n-1$ és $n+1 \mid \sigma(n)$ teljesül! Itt $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb pozitív egészek között az n-hez relatív prímek száma (Euler-féle φ függvény), $\sigma(n)$ pedig n pozitív osztóinak összege.

A műszaki főiskolák országos Hajós György Matematikaversenyének feladatai 1994. április 7.

A versenyt a Bolyai János katonai Műszaki Főiskola rendezte

1. Igazolja, hogy $1995^{1995} - 1993^{1993} + 1992$ osztható 1994-gyel!

2. Bizonyítsa be, hogy minden pozitív egész n-re

$$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \ldots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}.$$

3. Egy csonkagúla alapjai paralelogrammák. Bizonyítsa be, hogy testátlói egy pontban metszik egymást!

4. Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra

$$x \cdot \sqrt[3]{x-1} + \cos(\pi \cdot \ln x) + \frac{3}{2} > 0.$$

5. A sík minden pontját megjelöltük három adott szín valamelyikével. Bizonyítsa be, hogy található olyan egységnyi hosszúságú szakasz, amelynek végpontjai ugyanolyan színűek!

FELADATOK

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10., 1052**. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

13. Egy 2 egység oldalú négyzet tartalmaz hét, 1 egység területű négyszöget. Bizonyítsuk be, hogy van két négyszög, amelyek közös részének a területe legalább $\frac{1}{7}$ egységnyi!

(Bundeswettbewerb, 1973/74)

14. Az (x_n) számsorozatot definiáljuk az alábbiak szerint:

$$x_0 = \frac{a}{c},\quad x_n = \frac{a\cdot 10^n + b\dfrac{10^n-1}{9}}{b\cdot 10^n + c\dfrac{10^n-1}{9}} \qquad n \in \mathbb{N},$$

ahol a, b, c nullától különböző egyjegyű egészek.

Igazoljuk: Ha $x_0 = x_1$, akkor a sorozat minden tagja az x_0-lal egyenlő.

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

15. Mutassuk meg, hogy ha a és k pozitív egészek, akkor $a < 10^3$-re nincs az

$$5^k - 1 = a^2$$

egyenletnek megoldása.

(Ambrus Gabriella, Budapest)

16. Az O közepű körvonal B, A, C pontjai egy $BAC\sphericalangle = \alpha < 90°$ szöget határoznak meg. Mekkora ez az α, ha a BO egyenes az AC-t E-ben, a CO egyenes az AB-t D-ben metszve az $ADE\sphericalangle = EDC\sphericalangle = \alpha$ is tejesül?

(The Math. Gazette)

17. Egy tetraéder valamennyi lapszöge egyenlő. Szabályos-e? Ha a tetraéder öt lapszöge egyenlő, szabályos kell-e legyen a tetraéder?

(Am. Math. Monthly)

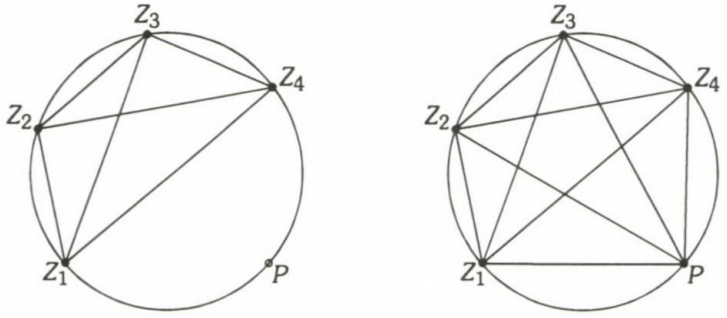
18. Egy tulipánkertész kertjének minden ágyásában tulipánokat nevel. A kert bármely két különböző színű tulipánjának pontosan egy ágyást ad. Bármely ágyáshoz pontosan egy olyan ágyás van, amelyben nincs amazzal egyező színű tulipán. Mutassuk meg, hogy

(i) bármely ágyásba legalább kétféle színű tulipánt ültetett;
(ii) a kertben legalább négy különféle színű tulipán van és
(iii) legalább hat ágyás;
(iv) nincs oly ágyás, amelyben három különféle színű virág lenne.

A pontverseny III. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

(A feladatok szövege az 1994/1. szám 22. oldalán jelent meg.)

94.1. Jelöljük a kör kerületén pirosra festett pontot P-vel, a zöldre festetteket Z_1, Z_2, Z_3, Z_4-gyel. Könnyen összeszámolható, hogy a zöld pontok 1 négyszöget és 4 háromszöget határoznak meg, tehát összesen 5 konvex sokszöget.



Az öt pont, tehát a 4 zöld és a P piros együtt 1 ötszöget, 4 négyszöget és 6 háromszöget határoznak meg, úgy, hogy P mindegyik sokszög csúcsai közt szerepel. Ez összesen 11 sokszög.

Tehát azokból a sokszögekből van több, amelyeknek van piros csúcsa.

Ha az 1994 adott pont közül egy piros, a többi zöld, akkor nem kell összeszámolnunk a sokszögek számát. Elég meggondolni, hogy minden olyan sokszögből, amelynek a csúcsai a zöld pontok közül kerülnek ki, kaphatunk egy eggyel több oldalú sokszöget, amelynek csúcsai ugyanazok a zöld pontok, meg még a piros pont. Különböző zöld csúcsú sokszögekből különböző sokszögeket kapunk így, tehát ez már annyi sokszög összesen, ahány zöld csúcsú sokszög van. Ezeken kívül még vannak olyan háromszögek is, amelyeknek egyik csúcsa piros, másik két csúcsa zöld.

Tehát itt is több olyan sokszög van, aminek van piros csúcsa, mint olyan, amelyiknek nincs.

94.2. Helyezzük el a 16 számot egy 4-szer 4-es négyzet egyes mezőibe az ábrán látható módon.

(1)	2	3	(4)
5	(6)	(7)	8
9	(10)	(11)	12
(13)	14	15	(16)

A bekeretezett számok alkossák az egyik 8-as csoportot: 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16; a többiek a másikat: 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15.

Mindkét csoportban kiszámítva a számpárok összegét, a következő számokat kapjuk (a zárójelben álló szám azt jelzi, hogy az illető összeg hány különböző esetben jön ki):

5, 7, 8, 10, 11 (2), 12, 13, 14 (2), 15, 16, 17 (4),
18, 19, 20 (2), 21, 22, 23 (2), 24, 26, 27, 29.

94.3. Jelöljük a lányok számát l-lel, a fiúk számát f-fel. Tudjuk, hogy:

$$l + f = 42. \qquad (1)$$

Másrészt az első lány 7 fiúval táncolt, a második 8-cal, és így tovább, az l-edik lány $l + 6$ fiúval táncolt, de ez az összes fiú volt, tehát

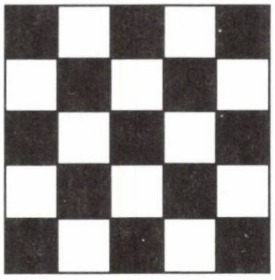
$$f = l + 6.$$

Az (1)-ben f helyére $l + 6$-ot írhatunk, így

$$2l + 6 = 42,$$

tehát $l = 18$, de akkor $f = 24$.

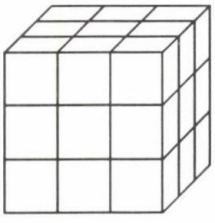
Ellenőrízhető, hogy a kapott eredmények valóban jók.



94.4. Az 5 egység oldalú négyzet 25 kis négyzetét (képzeletben) színezzük be sakktáblaszerűen az ábrán látható módon.

Így (például) 13 sötét és 12 világos mezőt kapunk. Minden sötét mező szomszédai világosak és megfordítva, minden világos mező szomszédai sötétek.

Miután mindegyik katicabogár egy szomszédos mezőre mászott át, az eddig a 13 sötét mezőn ülő katicabogár mindegyike egy világos mezőre mászott át. Mivel csak 12 világos mező van, legalább egy világos mezőn legalább 2 katicabogár lesz.



94.5. A 27 kiskockából összesen $\frac{27 \cdot 26}{2} = 351$ pár kiskocka választható ki. Számoljuk össze, hogy ezek között hány olyan pár van, amelyeknek legalább három csúcsa közös, azaz van közös lapjuk. Nevezzük az ilyen kiskockapárokat szomszédosoknak.

A kocka 8 csúcsában álló „sarok" kiskocka mindegyikének 3 szomszédja van, tehát ez $8 \cdot 3 = 24$pár. A 12 él közepén álló kiskockáknak 4-4 szomszédjuk van, ez összesen $4 \cdot 12 = 48$ pár. A lap közepén álló kiskockák mindegyikének 5 szomszédja van, ez összesen $6 \cdot 5 = 30$ pár. Végül a közepén álló egy belső kiskockának 6 szomszédja van, ez 6 pár.

Összesen $24 + 48 + 30 + 6 = 108$ pár, de mindegyiket kétszer számoltuk (a pár egyik és másik kockájánál is), tehát a szomszédos párok száma 54.

A keresett, nem szomszédos párok száma tehát $351 - 54 = 297$.

94.6. Tegyük fel, hogy van olyan $n > 0$ egész, amelyre $\frac{n-6}{15}$ és $\frac{n-5}{24}$ egyszerre egész számok, például $\frac{n-6}{15} = k$ és $\frac{n-5}{24} = l$, ahol l és k egész számok. Ebből

$$n = 15k + 6 \text{ és}$$
$$n = 24l + 5$$

következik, tehát

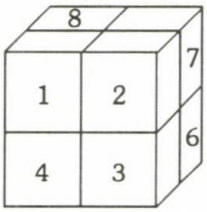
$$24l + 5 = 15k + 6.$$

Átrendezés után ezt kapjuk:

$$24l - 15k = 1, \quad 3(8l - 5k) = 1.$$

Itt a bal oldal osztható 3-mal a jobb oldal viszont nem. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát helytelen volt a feltevés, nincs olyan pozitív egész n, amire a két tört egyszerre egész szám lenne.

94.7. Lássuk be először azt, hogy egy 2 egység oldalú kockát 8 egy egység oldalú kiskockára darabolva az összes kockát különböző színűre kell festeni. Ez nyilván igaz, hiszen bármely két kiskockának van közös pontja, tehát különböző színűre kell festeni. Így a 8 csúcsban elhelyezkedő sarokkockák különböző színűek lesznek.



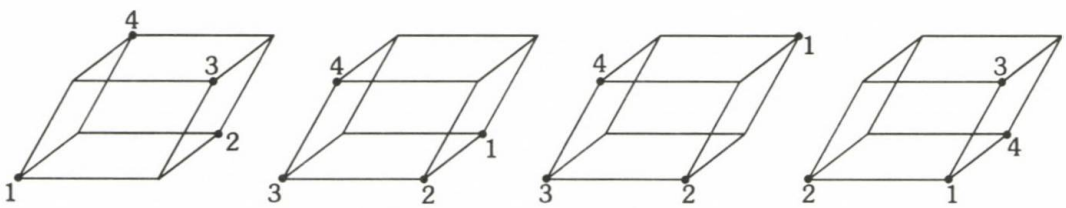
Az ábrán az egyes számok a kiskockák színét jelzik (az 5. színű kiskocka itt nem látszik). Képzeljük most el, hogy az adott 2, 4, 6 egység élhosszúságú, kiskockákra darabolt téglatestet kiszíneztük a kívánt módon. Vágjunk ki most belőle (például a 6 hosszúságú élre merőleges) két vágással egy 2 kiskocka vastagságú réteget, és a megmaradt két részt (az eredeti helyzetében) toljuk össze, ragasszuk össze.

Lássuk be, hogy az így kapott téglatest is a feltételnek megfelelően, jól van színezve. Nyilván, csak a ragasztási felület mentén lehetne „zavar". Induljunk el például a „bal oldali" megmaradt részből és vizsgáljuk a vágási felülethez csatlakozó 4 kis kockát. Ezek különböző színűek, például az 1-4 színekkel vannak befestve. A kivágott rétegben ehhez csatlaozó 4 kis kockát eredetileg csak az 5-8színekkel színezhettük. A rétegben ehhez a 4-hez csatlakozó jobboldali 4-et újra csak az 1-4 színekkel színeztük, tehát a másik, jobboldali részen a ragasztási felülethez csatlakozó 4 kis kockát újra csak az 5-8 színekkel színezhettük eredetileg is, tehát a színezés a ragasztott téglatestben is jó lesz.

Ha most az új téglatestből az előző módszerrel újra kivágunk egy 2 kiskocka szélességű réteget a (már) 4 egység hosszúságú élre merőlegesen és a megmaradt részeket összeragasztjuk, majd a másik (még megmaradt) 4 hosszúságú élre merőlegesen is kivágunk egy 2 hosszúságú réteget, és a megmaradt részeket is összeragasztjuk, akkor végül egy 2 egység oldalú kockát kapunk, amelynek 8 csúcsát éppen a kiinduló téglatest 8 csúcsában álló, egységoldalú kis kocka alkotja.

Mivel ez a kocka is jól van színezve, tehát az eredeti téglatest 8 csúcsában álló 8 kis kocka mind különböző színű.

94.8. Számozzuk meg az adott pontokat és nézzük azokat a paralelepipedonokat, amelyeknek csúcsai közt az adott 4 pont szerepel. Ezek között először úgy tegyünk különbséget, hogy egy csúcsából maximálisan hány, számmal jelölt csúcsokat összekötő él indul ki. Ez az élszám lehet 0, 2 és 3, amit a következő ábrán láthatnuk. A 2-höz két különböző eset is tartozik. Az ábrák alá írtuk az egy csúcsból kiinduló megjelölt pontokat összekötő maximális élek számát.



a) 0 *b)* 2 *c)* 2 *d)* 3

Az 1, 2, 3, 4 megjelölt pontok sorrendje összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle lehet. Nézzük meg, az egyes esetekben a 24 lehetőség közül hány ad különböző paralelepipedont.

Az *a)* esetben a pontok bármely sorrendjéhez ugyanaz a paralelepipedon tartozik.

A *b)* esetben az 1, 2, 3, 4 sorrend és a 4, 3, 2, 1 sorrend adja ugyanazt, így csak 12 különbözőt kapunk.

A *c)* esetben az 1, 2, 3, 4 és az 1, 4, 3, 2 adja ugyanazt, így itt is 12 különböző van.

Végül a *d)* esetben csak annak a csúcsnak a választásától függ a paralelepipedon, ahonnan a 3 él kiindul, így itt 4 lehetőség van.

Összesen tehát $1 + 12 + 12 + 4 = 29$ különböző paralelepipedon van.

KÖNYVISMERTETÉS

Előkészítő és félvételi feladatok matematikából a gimnáziumokba jelentkezők részére 1977-1993

Az „Árpád Gimnázium" Alapítvány kiadásában megjelent példatár azoknak az általános iskolai, illetve általános iskolás korú tanulóknak szól, akik gimnáziumban kívánják tanulmányaikat folytatni, illetőleg már egy hat- vagy nyolcévfolyamos gimnázium tanulói. A szerzők számot tartanak az említett tanulókat nevelő tanárok érdeklődésére is, remélve, hogy a feladatgyűjtemény anyaga segíti munkájuk változatosabbá tételét. Minden bizonnyal haszonnal forgathatják továbbá a kiadványt azok a szülők, akik maguk is tevékenyen szeretnék gyermekük fejlődését biztosítani.

A feladatgyűjtemény első része a budapesti Árpád Gimnáziumban tartott gimnáziumi előkészítő foglalkozások anyagára épül. Az ezekhez adott, tudatosan rövid útmutatások és végeredmények célja az, hogy a tanulókat a feladattól a megoldásig vezető út önálló bejárására késztesse.

A második rész a fővárosi, speciális matematika tantervű gimnáziumi osztályokba szervezett írásbeli felvételi vizsgák anyagát tartalmazza 1977-től 1993-ig. A kitűzött feladatok részletes és többféle megoldása mintául szolgál arra, mit jelent a megoldási ötletek valóra váltása, a megoldások szabatos, ám rövid megfogalmazása és leírása.

Hajnal Imre

Matematikai ismeretek 13-14 éveseknek

A tankönyv segíti a tanárt a tanításban, a tanulót a tanulásban. Az azonban kérdéses, hogy egy tankönyv milyen területen és milyen mértékben jelent segítséget.

A matematikatanítás célkitűzéseit, a tanítandó anyagot a tanterv előírja, de a megvalósítás útja már szabadon választható.

Ez a könyv a 13–14 éves tanulók tanításához, tanulásához úgy kíván segítséget nyújtani, hogy a matematikai fogalmak kialakulását, értelmezését és a közöttük lévő kapcsolatokat állítja előtérbe. Igyekszik rámutatni, hogy az egyszerű, megszokott munkában is felismerhetünk érdekességeket és ezekből hasznos új ismeretekhez juthatunk. A megfigyelések tudatos megfogalmazása, és a lényeg felismerése után következik az új ismeret tisztázása, értelmezése. Közben lehetőséget ad, példát mutat elvonatkoztatásra, absztrakcióra.

Az anyag áttekintését, a logikai rend felismerését a tárgyalásmód igyekszik megkönnyíteni. Ezt a könyv szerkezete is segíti.

A címek a fejezetek tartalmát pontosan tükrözik, így a tartalomjegyzék az egész könyvet áttekinthetővé teszi. (Vannak ismétlődő

címek is: *A számfogalom bővítése I-II-III; Egyenletek, megoldásuk I-II-III.* Ezekben a korábban tanultakat újabb ismeretekkel bővítjük.)

A könyvben az egyes fogalmak meghatározásai, valamint az állítások, tételek könnyen megtalálhatók. A vastag, a dőlt, az apróbb betűvel szedett részek is segítik a tájékozódást.

Az egyes fejezetekben kidolgozott mintapéldák vannak úgy összeállítva, hogy azok egyrészt az anyag megértését segítsék, másrészt példát mutassanak az önálló munkára, módszert a problémamegoldásra. A könyv kevés kitűzött feladatot tartalmaz, továbbiakat feladatgyűjtemény feladatainak sorszámával ajánl.

A könyv az elmondott szempontok alapján (230 oldalon) tartalmazza azt a matematikai anyagot, amelyet a 13–14 éves tanulók bármely iskolatípusban tanulnak.

A feladatmegoldó verseny 1-2. fordulóján az alábbi tanulók érték el a legjobb eredményeket:

5-6. osztály

Venter György **68**
Kodály Zoltán Ált. Isk., Nyíregyháza

Bárány Zsófia **65**
Fazekas Mihály Gimn. és Ált. Isk., Budapest

Kocsis Zoltán **62**
Kálvin téri Ált. Isk. Makó
tanára: Dr. Varga Istvánné

Marosi András **62**
Kálvin téri Ált. Isk., Makó
tanára: Dr. Varga Istvánné

Fiers Márton **60**
Fazekas Mihály Gimn. és Ált. Isk.
tanára: Köves Judit

7-8. osztály

Balogh Zoltán **68**
Krúdy Gyula Gimnázium, Nyíregyháza

Tábith Andrea **61**
Kálvin téri Ált. Isk., Makó
tanára: Dr. Varga Istvánné

Horváth László **58**
Önkormányzati Gimnázium, Csurgó
tanára: Laczó János

Fodor Krisztina **58**
Kálvin téri Ált. Isk., Makó
tanára: Dr. Varga Istvánné

Siket Péter **39**
Kálvin téri Ált. Isk., Makó
tanára: Dr. Varga Istvánné

* * *

Közlemény

A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola 1994. július 11-e és 15-e között rendezi meg XXIII. Nyári Akadémiáját. A 10-16 éves korosztályt tanító pedagógusok a következő tagozatokon vehetnek részt:

matematika
pedagógia-pszichológia
történelem
magyar nyelvészet.

Bővebb felvilágosítás illetve jelentkezési lap a következő címen kérhető: Juhász Gyula Tanárképző Főiskola, Szeged, Boldogasszony sgt. 6. tel.: 62/310-244/44. Kenyeres Zsuzsanna.

Dr. Scharnitzky Viktor

MATEMATIKA

Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek

Szerzők: Kosztolányi József - Mike János - Palánkainé Jakab Ágnes - Dr. Szederkényi Antalné - Vincze István

Amint ezt a kötet címe is mutatja, a feladatgyűjtemény nem iskolatípushoz, hanem korosztályokhoz kötődik, és mivel a 10–14 éves gyerekek mind iskolakötelesek még, ezért elvileg minden 10–14 éves diák feladatgyűjteménye lehet matematikából ez a kötet. Azt már a benne található feladatanyag dönti el, hogy egyaránt használható-e az általános iskola felső tagozatában, a 6 osztályos gimnázium első két és a 8 osztályos gimnázium első négy osztályában. Véleményem szerint igen, mert minden olyan tananyagrész, amely a Nemzeti Alaptanterv szerint a felsorolt iskolatípusok javasolt tanterveiben szerepel, a kötetben is megtalálható, csak a közlés sorrendje lehet eltérő.

Ma már több feladatgyűjtemény áll a könyv címében szereplő korosztályok, tanáraik és a segíteni akaró szülők rendelkezésére. Mi az, amiben ez a kötet előnyös vagy rokonszenves?

Előnyös a kitűzött feladatok száma. A kötetben 3141 számozott, de a nagyszámú hasonló feladat egy sorszámon való szerepeltetése miatt több mint tízezer (!) feladat van. A sok azonos nehézségű feladat segítheti a gyakorlást otthon vagy akár a személyre szóló feladatok kitűzését a számonkérésnél az iskolában. Például az egyenesszög törtrészének kiszámítására (556. feladat) 24 alfeladat van.

556. Mekkora az egyenesszög

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{2}{3}$; *d)* $\frac{1}{4}$;

e) $\frac{3}{4}$; *f)* $\frac{1}{5}$; *g)* $\frac{2}{5}$; *h)* $\frac{3}{5}$;

i) $\frac{1}{6}$; *j)* $\frac{5}{6}$; *k)* $\frac{1}{9}$; *l)* $\frac{2}{9}$;

m) $\frac{5}{9}$; *n)* $\frac{1}{10}$; *o)* $\frac{7}{10}$; *p)* $\frac{9}{10}$;

q) $\frac{10}{10}$; *r)* $\frac{11}{10}$; *s)* $\frac{1}{18}$; *t)* $\frac{3}{18}$;

u) $\frac{5}{18}$; *v)* $\frac{7}{18}$; *w)* $\frac{10}{18}$; *z)* $\frac{18}{18}$

része?

Előnyös a kitűzött feladatok nehézségi fokának széles skálája. Ez a teljesen egyszerű feladatoktól a szakköri foglalkozásokra való feladatokig terjed. A finom árnyalatokat kihasználva a fokozatosság elve gondosan betartható és a matematikában eltérő tehetségű tanulók saját szintjüknek megfelelően foglalkoztathatók. Ilyen rész pl. a *Műveletek törtszámokkal* című fejezet *Vegyes feladatok* része.

652. Melyik több? Mennyivel?

a) $\frac{3}{5}$m-nek a harmada vagy $\frac{4}{5}$m-nek a negyede;

654. Melyik nagyobb? Mennyivel?

a) a $\frac{3}{4}$ felének és kétszeresének az összege, vagy $\frac{4}{5}$ harmadának és háromszorosának az összege;

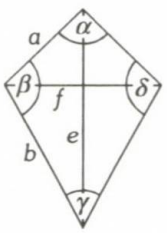
681. Egy múzeum természetrajzi kiállításán a szemes lepkék egy dobozban voltak. Legalább mekkorák a doboz méretei, ha egy lepke elhelyezésére $5\frac{3}{4}$ cm hoszszú, $4\frac{1}{2}$ cm széles téglalap alakú

terület kell, 8 sorban helyezték el a lepkéket, és minden sorba 8-at tettek? A tű hossza $4\frac{4}{5}$ cm.

721. $\frac{3}{5}$ dm^3-es fémkocka tömege $4\frac{17}{25}$ kg. Mennyi a tömege az ugyanebből az anyagból készült $\frac{7}{15}$ dm^3-es hengernek? Melyik testnek a tömege több, és mennyivel? Mennyi a testek anyagának sűrűsége? Milyen anyag ez?

Előnyös, hogy azokban a témakörökben (ilyen például a *geometriai szerkesztések* témakör), amelyekben a feladatokból véges számú változat készíthető, a kötet szerzői a teljességre törekedtek. Például ezt követik a 2357–2391. feladatok.

2379. Szögmérő használata nélkül szerkessz deltoidot a következő adatokból! (Az adatok az ábrának megfelelőek.)



a) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\beta = 120°$;
b) $a = 30$mm; $b = 0{,}6$ dm; $\gamma = 45°$;
c) $a = 5$ cm; $e = 0{,}8$ dm; $\beta = 105°$;
d) $b = 70$ mm; $e = 9$ cm; $\gamma = 37{,}5°$;
e) $a = 6$ cm; $f = 70$ mm; $\alpha = 97{,}5°$;
f) $b = 0{,}75$ dm; $f = 4$ cm; $\gamma = 127{,}5°$;
g) $e = 8{,}5$ cm; $f = 0{,}4$ dm; $\alpha = 82{,}5°$;
h) $e = 7$ cm; $\alpha = 75°$; $\beta = 30°$;
i) $f = 0{,}5$ dm; $\gamma = 45°$; $\delta = 135°$.

Előnyös, hogy az egy témához tartozó feladatok változatosak, sokszínűek, és így a téma több oldalról is megközelíthető és körüljárható. Ilyen téma például a számok meghatározására vonatkozó szöveges feladatok (1246–1290.)

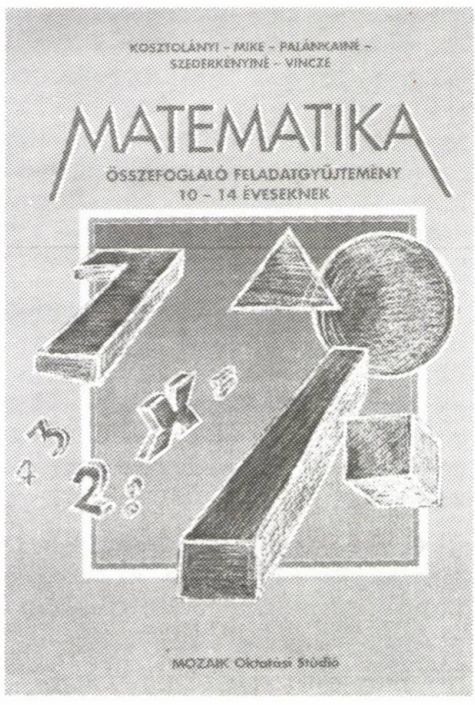
Rokonszenves a feladatok kétféle módon történő csoportosítása, mégpedig tárgykörök (*Tartalomjegyzék*), és a megoldási módszerek (*4. oldal*) szerint. Ez a tanárok munkáját könnyíti meg.

Rokonszenves több szöveges feladat szövegének újszerű, például párbeszédes megfogalmazása. Például az 1441. feladatban: Kati azt mondja Zsuzsinak: „Adj nekem 5 képeslapot, akkor nekem éppen kétszer annyi lesz, mint neked!" Zsuzsi így válaszol: „Inkább te adj nekem hármat, akkor egyenlő számú képeslapunk lesz." Hány képeslapja van Katinak és hány Zsuzsinak?

Rokonszenves a leírt szöveg töltelékmentes tömörsége, a megfogalmazás szabatossága, az ábrák szép egyszerűsége, a kötet kiállítása és kezelhetősége.

Végül a kötet előnye, mégpedig anyagi előnye az, hogy a könyv (egyszeri költség) négy évre szól.

Ajánlom a kötetet elsősorban 10–14 éves diákokat tanító kollégáim figyelmébe, bármely tankönyv alapján tanítanak is, mert ők döntik el, hogy használni fogják-e tanítványaik a könyvet, vagy nem, másodsorban azoknak a szülőknek (nagyszülőknek) a figyelmébe, akik segíteni akarják gyermekük (unokájuk) matematika tanulását.



Hajnal Imre

Matematikai fogalmak, tételek

Ebben a könyvben összefoglaljuk és rendszerezzük az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgák elméleti anyagát. Ez a rendszerezés az egyetemi tanulmányokra készülők mellett azoknak is hasznos, akik bár nem akarnak mélyebben foglalkozni a matematikával, de világosan szeretnék látni ismereteik lényegét, és törekednek a matematikai fogalmak, definíciók, állítások, tételek közötti logikai rend megértésére.

A matematikai sajátosságok, a matematikai gondolkodás elemeinek a megvilágítása és azok összefoglalása jól alkalmazható szilárd tudást nyújtanak. Ez elősegíti a sikeres érettségi, illetve felvételi vizsgát, amellett a mindennapok matematikájában is eligazít.

A bevezető fejezetben azokról az alapvető fogalmakról van szó, amelyek a matematikával való foglalkozás közben nap mint nap előfordulnak, de éppen a látszólagos egyszerűségük és hétköznapiságuk miatt nem szánunk kellő időt a végiggondolásukra. Ezek tudatos megértése azonban segíti azt, hogy a különböző fogalmakat ne csak azért használjuk, mert ,,ezt kell megtanulnunk'', hanem saját magunktól is ráérezzünk a lényegükre. A tanulás során ezzel nemcsak időt nyerünk, hanem egy-egy összefüggés felismerése is élményt jelent.

Célunk a könyv módszerét is meghatározza. A fejezetek anyagát tömören foglaltuk össze. Az egyes anyagrészek bevezetése egy-két mondat. Arra a kérdésre, hogy mi indokolja a témával való foglalkozást és új fogalmak bevezetését, a részletes választ a tankönyvek adják meg.

A könyv szerkezeti felépítését a tartalomjegyzéke világosan mutatja. Az egyes fejezetcímek meghatározzák a fejezet anyagát. Így például a VII. fejezetben a függvényekkel foglalkozunk, ebben tárgyaljuk az exponenciális, a logaritmikus és a trigonometrikus függvényeket is, holott ezek az V., illetve a XVII. fejezethez is kapcsolódnak. (Többféle kapcsolat más témánál is előfordulhat.)

A könyv mindössze néhány megoldott feladatot tartalmaz, annyit, amennyi a fogalmak, tételek vagy eljárások megértéséhez feltétlenül szükséges. Az ismeretek biztos alkalmazásához azonban kellő gyakorlat is kell, ezt további feladatok megoldásával lehet elérni.

A könyv fő fejezetei

I. Halmazok, halmazműveletek
II. A matematikai logika alapjai
III. A számokról
IV. Számelméleti alapismeretek
V. Hatvány, gyök, logaritmus
VI. Betűs kifejezések, nevezetes azonosságok
VII. Függvények
VIII. Egyenletek, egyenlőtlenségek, megoldásuk
IX. Sorozatok
X. Geometriai alapismeretek
XI. Geometriai szerkesztések
XII. Geometriai transzformációk
XIII. Vektorok, vektorműveletek
XIV. Síkidomokra vonatkozó műveletek
XV. Síkidomok területe
XVI. Testek térfogata, felszíne
XVII. Trigonometriai ismeretek
XVIII. Koordináta-geometriai ismeretek

Dr. Varga Istvánné

Tudásszintmérő feladatlapok matematikából 1-8. osztály

A MOZAIK Oktatási Stúdió kiadásában több tantárgyból már megjelentek a tudásszintmérő feladatlapok. A kiadott füzetek a pedagógusok körében kedvező fogadtatásra találtak. A Stúdió kezdeményezésére a makói Kálvin Téri Általános Iskola munkaközössége matematikából is kidolgozta a felmérő feladatsorokat.

Az egyes évfolyamokon 7–10 felmérő feladatlapot találunk, annak megfelelően, hogy a nevelők hány tematikus egység köré csoportosították a tananyagot.

A feladatsorok a jelenleg érvényben lévő tantervi anyag követelményeit kérik számon a tanulóktól. Az összeállításokat az ország bármelyik iskolájában felhasználhatják, értékelésével képet kaphatnak az adott témakör ismereteinek elsajátítási szintjéről.

A lektorok véleménye szerint a feladatok megfogalmazása pontos és egyértelmű. A szerzők a matematika szaknyelvét a tanulók életkori sajátosságainak megfelelően használják.

A felmérők A és B változatban készültek. Javasoljuk, hogy az egyes évfolyamok részére az osztály felének A, a másik felének a B lapokat rendeljék meg a nevelők. Az A és B változat azonos szintű feladatokat tartalmaz, így lehetőség nyílik egy osztályon belül több tudáselem számonkérésére is.

Egy-egy felmérőlap után szorgalmi feladatokat is találunk, melyek egyrészt a kiegészítő anyagot tartalmazzák, másrészt olyan feladatokat, amelyek megkövetelik a tanulóktól az ismeretek alkotó alkalmazását, ami az ismeretszerzés legmagasabb szintje. A szorgalmi feladatok között találunk játékos, tréfás feladatokat is. A jobb képességű tanulók nagyobb arányú terhelését, a tehetséggondozást is segítik ezek a feladatok.

Az összeállítók bíznak abban, hogy a felméréssel, a tudásszintmérő feladatok megoldatásával a nevelők, a szülők látni fogják, hogy a gyermekek milyen mértékben sajátították el a tantervi anyagot. Ezek az ismeretek, információk az oktatás-nevelés folyamatában a tanulók, a szülők és a pedagógusok számára egyaránt nélkülözhetetlenek.

Urbán János: Határértékszámítás - Példatár

A könyv első kiadása a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg a Bolyai Könyvek sorozatban, s régóta hiánycikk.

A példatár kifejezés utal rá, hogy a címben jelzett témát a könyv gyakorlatokon és feladatokon keresztül dolgozza fel, ezen kívül tartalmazza azok részletes megoldásait is. Az első fejezet a valós számok alaptulajdonságait, a teljes indukciót és a sorozatok határértékét tárgyalja. Alkalmazásként szerepel a valós kitevőjű hatvány szabatos definíciója és a végtelen lánctörtek. A második fejezet témája a függvény határértéke és néhány alkalmazása. A harmadik fejezet a differenciálhányados fogalmát és alkalmazását tárgyalja függvényvizsgálat és határértékfeladatok megoldására.

A könyvet matematika tagozatos középiskolai tanulóknak, valamint matematikát hallgató főiskolásoknak, egyetemistáknak, matematika szakos tanároknak ajánljuk.

Szoftvertermékek oktatási intézmények számára

Windows 3.11 (magyar)	8.500	CP Anti Virus for Windows 1.0	10.500
Windows for Workgr. 3.11 (magyar)	5.300	CP Backup for Windows 2.0	12.600
Windows NT 3.1	20.000	Access for Windows 1.1	20.000
Word for Windows 6.0 (magyar)	20.000	CorelDraw for Windows 3.0	30.500
Excel for Windows 4.0 (magyar)	13.700	CorelDraw for Windows 4.0	69.500
Excel for Windows 5.0	20.000	Corel Ventura for Windows 4.2	29.500
Project for Windows 3.0	15.800	MS Dos 6.2	10.500
Powerpoint for Windows 3.0	13.700	Word for Dos 6.0	10.500
Publisher for Windows 2.0	21.100	Works for Dos 3.0	5.300
Works for Windows 3.0 (magyar)	10.500	FoxPro for Dos 2.5	21.100
FoxPro for Windows 2.5 (magyar)	21.100	Macro Assembler 6.1	8.400
Quick C for Windows 1.0	9.500	PC Tools PRO 9.0	14.700
Visual C for Windows 1.0 Standard	8.400	CP Backup 8.0	12.600
Visual Basic for Windows 3.0 Stand.	21.100	Novell Netware (10 felhasználós)	122.000
PC Tools for Windows	14.700	Novell Netware (25 felhasználós)	181.000

A fenti árak ÁFA nélkül értendők.
A termékek a következő címen rendelhetők meg:

IMOSOFT KFT
6701 Szeged, Pf. 301. Tel: (62) 312-988

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1994. SZEPTEMBER ára: 88,- Ft II. évf. / 4. szám

TARTALOM

HOGYAN FEDJÜNK LE EGY LEFEDHETETLEN TÁBLÁT?
Csete Lajos, Czibulya Balázs
tanárok, Markotabödöge

LEFEDÉSEK HATSZÖGTÁBLÁN
Ambrus Gabriella
adjunktus, ELTE

ISMÉT A HATSZÖGTÁBLÁRÓL
Tóth Sándor
tanársegéd, Sárospatak

SZEMLÉLTETÉS SZÖGES-LYUKAS TÁBLÁN
Török Tamás
főiskolai tanár, Esztergom

A MATEMATIKATANÍTÁS FEJLŐDÉSE

VERSENYFELHÍVÁS A 11-14 ÉVES KORÚ TANULÓK RÉSZÉRE AZ 1994-95. TANÉVRE

AZ 1993/94. TANÉVI MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY IV. FORDULÓJÁBAN KITŰZÖTT FELADATOK MEGOLDÁSAI

FELADATROVAT TANÁROKNAK

HÍREK VERSENYEKRŐL

Megtörténhet, hogy szeretnénk megkedveltetni diákjainkkal a matematikát. Ennek elősegítésére néha érdemes olyan problémákat kitűzni a gyerekeknek, – főleg az általános iskolásoknak – amelyek nem tűnnek kifejezetten matematikafeladatoknak, másrészt nem... *(3. oldal)*

Bizonyára nem véletlen, hogy a hatszögek a legkedveltebb sokszögek közé tartoznak a diákság körében, különösen a szabályos hatszög. Hogy mennyire nem egyszerűen matematikai fogalomról van szó, mutatja az is, hogy az egyik legrégebbi játék, a sakk is felhasználja,... *(10. oldal)*

Az alsó tagozat matematikatanításában közismert szemléltető eszköz a szöges-lyukas tábla. Kiválóan alkalmas a tevékenységen alapuló ismeretelsajátításra.

Négyzethálós elrendezésben 21×21 db lyukat tartalmaz, amelyek egymástól 1 cm távolságra helyezkednek el. *(15. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 440 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

HOGYAN FEDJÜNK LE EGY LEFEDHETETLEN TÁBLÁT?
Csete Lajos, Czibulya Balázs
tanárok, Markotabödöge

LEFEDÉSEK HATSZÖGTÁBLÁN
Ambrus Gabriella
adjunktus, ELTE

ISMÉT A HATSZÖGTÁBLÁRÓL
Tóth Sándor
tanársegéd, Sárospatak

SZEMLÉLTETÉS SZÖGES-LYUKAS TÁBLÁN
Török Tamás
főiskolai tanár, Esztergom

A MATEMATIKATANÍTÁS FEJLŐDÉSE

VERSENYFELHÍVÁS A 11-14 ÉVES KORÚ TANULÓK RÉSZÉRE AZ 1994-95. TANÉVRE

AZ 1993/94. TANÉVI MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY IV. FORDULÓJÁBAN KITŰZÖTT FELADATOK MEGOLDÁSAI

FELADATROVAT TANÁROKNAK

HÍREK VERSENYEKRŐL

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Csete Lajos - Czibulya Balázs

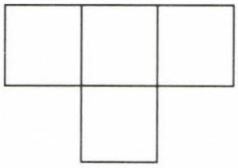
Hogyan fedjünk le egy lefedhetetlen táblát?

Megtörténhet, hogy szeretnénk megkedveltetni diákjainkkal a matematikát. Ennek elősegítésére néha érdemes olyan problémákat kitűzni a gyerekeknek, – főleg az általános iskolásoknak – amelyek nem tűnnek kifejezetten matematikafeladatoknak, másrészt nem igényelnek különösebb előismeretet.

Ilyen típusú problémák például táblák különböző idomokkal való lefedése. Egy lehetséges módszer a tanulók kíváncsiságának felkeltésére, ha olyan táblákat is vizsgálunk, amelyeknek lehetetlen a lefedése. Számos ilyen problémát találhatunk.

1/a feladat

Lefedhető-e egy 6 × 6-os négyzet alakú tábla az 1. ábrán látható négy egység területű T alakú idomokkal?



1. ábra

A sakktáblaszínezés módszerét nem ismerő tanulókat engedjük, hogy kínlódjanak a lefedéssel. Majd amikor remélhetőleg senkinek sem sikerült lefedni a táblát, megmutatjuk, hogy a lefedés nem lehetséges.

Színezzük ki ugyanis a 6 × 6-os tábla mezőit a sakktáblának megfelelően felváltva fehérre illetve feketére. Ekkor ugyanannyi fehér mezőt kapunk, mint feketét. Figyeljük meg, akárhogyan is tesszük a T idomot a táblánkra (persze a T idom minden mezőjének teljes táblamezőt kell takarnia), az mindig 3 fehér és 1 fekete, vagy 3 fekete és 1 fehér mezőt fed le. Ezért az előbbiek miatt midkét típusúból ugyanannyi T idomnak kell lennie. Vagyis a T idomok száma páros. Másrészt $6 \cdot 6 = 36$ és ezért $36 : 4 = 9$ darab T idomunk van. Ez nem páros szám, ellentmondásra jutottunk. Tehát a tábla nem fedhető le T idomokkal.

Ezek után azt mondjuk a gyermekeknek, hogy megnézzük, az előzőek ellenére lefedhető-e a tábla T idomokkal?

Ha a tanulóink megértették előző bizonyításunkat, akkor kissé furcsán nézhetnek ránk.

1/b feladat

Tekintsük a 6 × 6-os táblát, az alsó és felső szélét ragasszuk össze! Míg a tábla bal oldalát megcsavarva ragasszuk a jobb oldalához! Az így kapott tábla lefedhető-e az előző T idomokkal?

	29	30	7	8	9	10	11	12	25	26
	35	36	1	2	3	4	5	6	31	32
	5	6	31	32	33	34	35	36	1	2
	11	12	25	26	27	28	29	30	7	8
	17	18	19	20	21	22	23	24	13	14
	23	24	13	14	15	16	17	18	19	20
	29	30	7	8	9	10	11	12	25	26
	35	36	1	2	3	4	5	6	31	32
	5	6	31	32	33	34	35	36	1	2
	11	12	25	26	27	28	29	30	7	8

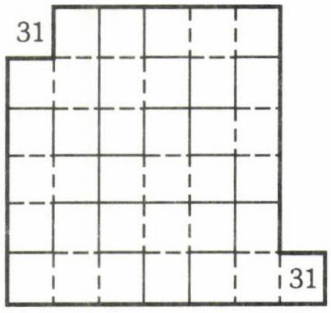
2. ábra

Az érthetőség kedvéért Jeffrey R. Weeks nyomán megszámozzuk a mezőket és a tábla

köré további megfelelően számozott táblákat rakunk a 2. ábrának megfelelően

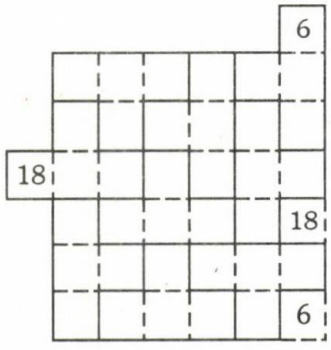
Ha ezt a megcsavarva-összeillesztett táblát tekintjük, akkor esélyünk lehet ezen tábla lefedésére. Ugyanis erről a tábláról egy idom „lelóghat". Ezután próbálkozhatunk a lefedéssel.

A 3. ábrán láthatunk egy megoldást a lefedésre. világos, hogy minden egészet pontosan egyszer fedtünk le 1-től 36-ig.



3. ábra

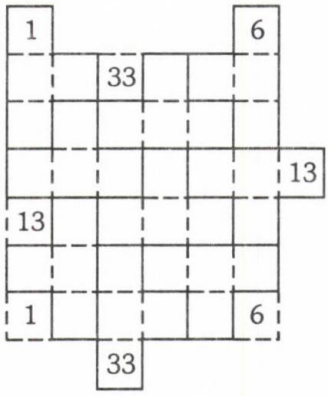
A 4., 5. és 6. ábrán további megoldásokat láthatunk.



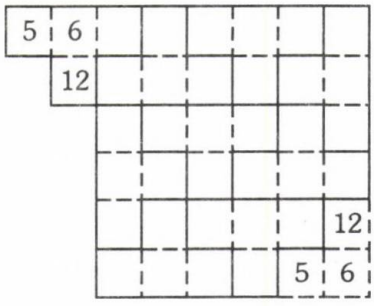
4. ábra

A gyerekekkel tovább kutathatunk megoldás után, mert vannak, Jearl Walker szerint a megcsavarva-összeillesztett tábla a Klein-féle kancsó síkbeli megfelelője. Klein-féle kancsót sok helyen láthatunk. Például a Topológia c. szakköri füzet 92. oldalán.

Ezek után fölmerülhet az a kérdés, hogy mi történik akkor, ha mindkét oldalpárt megcsavarjuk.



5. ábra



6. ábra

1/c feladat

Egy 6 × 6-os tábla alsó szélét megcsavarva ragasszuk a felső széléhez! Majd a tábla bal szélét megcsavarva ragasszuk a jobb oldalához! Lefedhető-e az előző T idomokkal a táblázat?

A 7. ábrán láthatjuk e tábla képét.

Könnyen észrevehetjük, hogy a 3. és 6. ábrán az 1/b feladatra adott megoldások az 1/c feladatnak is megoldásai. Tehát létezik a kétszer megcsavarva-összeillesztett táblán is a lefedés.

Ezek után igen várható a tanulók esetleges kérdése. Minek csavargatjuk a táblát, egyszerűen összeillesztjük a szemközti oldalakat és úgy vizsgáljuk a táblát.

26	25	12	11	10	9	8	7	30	29
32	31	6	5	4	3	2	1	36	35
5	6	31	32	33	34	35	36	1	2
11	12	25	26	27	28	29	30	7	8
17	18	19	20	21	22	23	24	13	14
23	24	13	14	15	16	17	18	19	20
29	30	7	8	9	10	11	12	25	26
35	36	1	2	3	4	5	6	31	32
2	1	36	35	34	33	32	31	6	5
8	7	30	29	28	27	26	25	12	11

7. ábra

1/d feladat

Egy 6 × 6-os tábla alsó és felső szélét ragasszuk össze! Majd a tábla bal oldalát ragasszuk a jobb oldalhoz! Lefedhető-e az így kapott tábla az említett T idomokkal?

A tábla képét a 8. ábrán láthatjuk.

11	12	7	8	9	10	11	12	7	8
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
35	36	31	32	33	34	35	36	31	32
29	30	25	26	27	28	29	30	25	26
23	24	19	20	21	22	23	24	19	20
17	18	13	14	15	16	17	18	13	14
11	12	7	8	9	10	11	12	7	8
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
35	36	31	32	33	34	35	36	31	32
29	30	25	26	27	28	29	30	25	26

8. ábra

Az ilyen típusú illesztést síkbeli toroidnak nevezhetnénk. (A toroid tórusz-szerűt jelent és a tórusz ugyebár úgy néz ki, mint egy felfújt aztógumi.) Ugyanis jobbra vagy balra haladva a tábla teljes kerületét körbejárhatjuk. Míg ha kilépünk a táblából jobbra, akkor visszakerülünk a tábla belsejébe balról. Ugyanígy például felülről kilépve a táblálból, rögtön a tábla belsejében vagyunk alulról. Tessék próbálkozni az 1/d feladattal!

Ha meguntuk a négyzet alakú táblák vizsgálatát, akkor esetleg próbálkozhatunk téglalap alakú táblákkal is. Segítség gyanánt felhasználhatjuk D. W. Walkup 1965-ből származó tételét:

Legyenek a és b pozitív egészek, ekkor az a × b-s téglalap akkor és csak akkor fedhető le négy egységnégyzetből álló T idomokkal, ha a és b egyaránt osztható 4-gyel. [3]

E tételből rögtön következik, hogy az 1/a feladatnak nincs megoldása. (Egyébként az angolszászok a négy egységnégyzetből álló T idomot érthető módon T-tetromino-nak nevezik.)

Természetesen nem csupán T idomokkal kísérletezhetünk, hanem egyéb mozaiklapokkal is. Az izgalom kedvéért vegyünk egy klasszikusan lefedhetetlen táblát, majd próbáljuk ki, hogy az előző műveletek elvégzése után is lefedhetetlen marad-e a tábla!

2. feladat

Egy 10 × 10-es tábla lefedhető-e 1 × 4-es téglalapokkal? [4]

Ha a táblát 2 × 2-es négyzetekre osztjuk fel és ezeket a sakktáblaszínezésnek megfelelően felváltva fehérre illetve feketére festjük, akkor hamar beláthatjuk, hogy nem lehetséges klasszikus módon a lefedés. Ellenben nem klasszikus módon tekintve találhatnuk lefedéseket. A tanulók néhány perc alatt bizonnyal többet is találhatnak.

Könnyen gyárthatunk olyan téglalapokat, amelyek nem fedhetők le hagyományos módon 1 × *n*-es lapocskákkal (*n* pozitív egész), ha felhasználjuk David A. Klarner egy 1969-es tételét:

Legyenek a, b és n pozitív egészek, ekkor az a × b-s téglalap akkor és csak akkor fedhető le 1 × n-is téglalapokkal, ha n osztója a-nak vagy b-nek. [5]

(Itt a vagy szócska nem kizáró értelemben szerepel. Másrészt szokták az 1 × *n*-es téglalapokat az 1 × 2-es dominó mintájára *n*-ominónak nevezni.) E tételből is következik, hogy a 2. feladat klasszikus módon nem oldható meg.

Végezetül nem állhatjuk meg, hogy az egyik legnevezetesebb lefedhetetlen tábla lefedésére ne buzdítsunk. Az egyik középiskolás tankönyvben is olvashatjuk a következő feladatot, amelyet állítólag Neumann János eszelt ki. [6]

3. feladat

A 8 × 8-as sakktábla bal alsó és jobb felső sarkát kivágtuk. Ezt a csonkított táblát lefedhetjük-e 1 × 2-es dominókkal?

(Alkalmas módon ragasztgatva létezik lefedése, míg hagyományos módon tekintve nem létezik a lefedés, mint ahogy tanultuk.)

Reméljük, hogy néhány gyereknek sikerül kedvet csinálni a matematikához a lefedésekkel. Főleg akkor, ha nem áruljuk el, hogy ez matematika.

Jólesett volna belepillantanunk Jeffrey R. Weeks, The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-dimensional Manifolds. Marcel Dekker. Inc., New York, 1985. című könyvébe, amely állítólag témánkkal is foglalkozik. Reméljük Olvasóinknak alkalma lesz erre.

Irodalom

[1] Jearl Walker: Sík- és térbeli összerakós játékok, valamint megoldásuk egyszerűsítése, Tudomány 87/8. 82-86. old.

[2] Szederkényi Antal: Topológia (Középiskolai szakköri füzet), Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[3] D. W. Walkup: Covering a rectangle with T-tetrominoes Amer. Math. Monthly 72 (1965) 986-988. old.

[4] Róka Sándor: 1000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kft., Budapest, 1992.

[5] D. A. Klarner: Packing a rectangle with congruent n-ominoes J. Combinatorial Theory, 7 (1969) 107-115. old.

[6] Dr. Hajnal Imre - dr. Nemetz Tibor - dr. Pintér Lajos: Matematika III. (fakultatív B változat), Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

Ambrus Gabriella

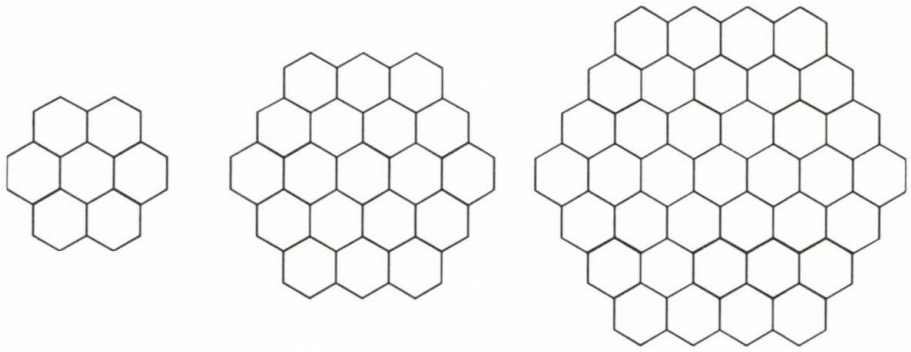
Lefedések hatszögtáblán - egy meglepő eredmény

Nemrég olvastam a következő tételt:

Egy *a* × *b* téglalap pontosan akkor fedhető le 1 × *n*-es lapokkal, ha *n* osztója az *a*-nak vagy a *b*-nek. [1]

Nevezzük a továbbiakban az ilyen lapokat lécnek. Mivel mostanában hatszögtáblák (1. ábra) különböző lapokkal való lefedhetőségével foglalkozom, megvizsgáltam, kimondható-e ezek esetében hasonló tétel.

Amint az az ábrából is látszik, hatszögtábláim hatszögrácsból „kivágott" hatszögek. Általánosan *m*-oldalú (*m*-es) az a hatszögtábla, amelynek minden oldalát *m* db rácshatszög határolja ($m > 1$).



1. ábra

1. Tétel

Egy m-es hatszögtábla mezőinek száma:
$S_m = 3m^2 - 3m + 1 = 3m(m-1) + 1$ (1)

Bizonyítás

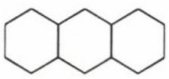
Az első $m-1$ és az utolsó $m-1$ sorban ugyanannyi mező van:

$$m + (m+1) + \ldots + (m+m-2),$$

tehát a középső sor $2m-1$ mezőjével együtt a mezők száma:

$$\frac{(m+2m-2)\cdot(m-1)}{2}\cdot 2 + 2m - 1 =$$
$$= (3m-2)(m-1) + 2m - 1 = 3m^2 - 3m + 1.$$

Az 1. Tétel miatt bármely hatszögtábla legfeljebb olyan $1 \times n$-es léccel (2. ábra) fedhető le, amely páratlan sok rácsmezőt tartalmaz, azaz n páratlan.



2. ábra

Ha $n = 3$ nyilvánvalóan nem lehetséges a lefedés.

Ha $n = 5$, akkor szükséges feltétel, hogy $5 \mid 3m(m-1) + 1$ teljesüljön.

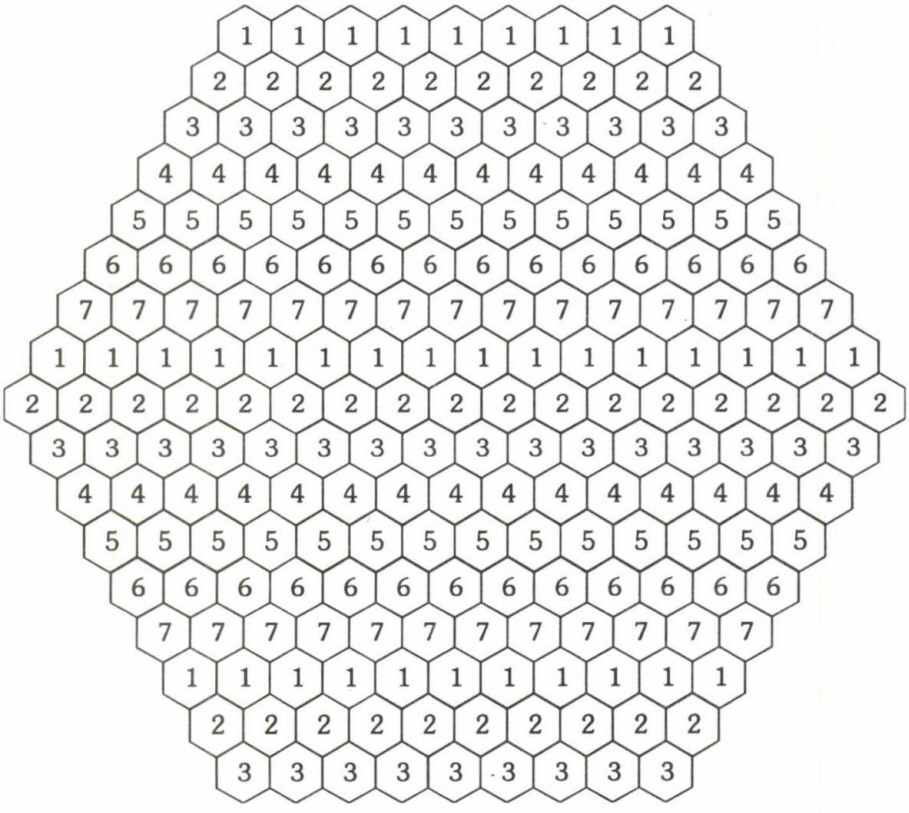
Legyen $m = 5k + r$, ekkor az előbbi feltétel csak akkor áll fenn ha $r = 2$, 3, vagy 4. Ezek behellyettesítésével azonban látható, hogy a feltétel sohasem teljesül.

Ha $n = 7$, akkor $m \leq 13$ esetén csak az $m = 2$, az $m = 6$, az $m = 9$ és az $m = 13$ választásra teljesül, hogy a mezők száma 7 többszöröse.

($S_2 = 7$, $S_6 = 7 \cdot 13 = 91$, $S_9 = 7 \cdot 31 = 217$, $S_{13} = 7 \cdot 67 = 469$)

Az $m = 2$ ill. $m = 6$ esetén könnyen belátható, hogy ezek a hatszögtáblák nem fedhetők le 1×7-es léccel. Ugyanis az $m < 7$ esetén a sarokmezők csak átló irányában elhelyezett léccel fedhetők le, ám két szemközti sarokmező lefedéséhez az átló túl rövid, hiszen hossza a sorok száma, azaz: $m + m - 1 = 2m - 1$.

Az $m = 9$ esetén a hatszögtáblát a 3. ábrán látható módon számoztam. Így egy 1×7-es fedőlap vagy 7 azonos számozású mezőt fed le, vagy minden számból pontosan egyet, és 31 fedőlap kell. Legyen a különböző számozásúakat lefedő lapok száma: x, az azonos számozásúakat lefedőké pedig: $31 - x$.
Így az 1-es számmal jelzett mezőből $x + 7a$,
a 2-es számmal jelzett mezőből $x + 7b$,
$\vdots$
a 7-es számmal jelzett mezőből $x + 7g$ darab lesz, ahol $a + b + \ldots + g = 31 - x$.



3. ábra

Így látható, hogy ha a 9-es tábla lefedhető az 1×7-es léccel, akkor az azonos számozású mezők számának hetes maradéka egyenlő.

Viszont 1-es számmal jelzett mezőből 36 db van, míg a 2-es számmal jelzettből 37 db, s így az előbbi feltétel nem teljesülhet, tehát ez a lefedés nem lehetséges.

Az előbbi gondolatmenet általánosítható, és bebizonyítható a következő állítás:

2. Tétel

Nincs olyan m-es hatszögtábla, amely lefedhető lenne $1 \times n$-es lapokkal ($n > 2$, $m > 2$).

Bizonyítás

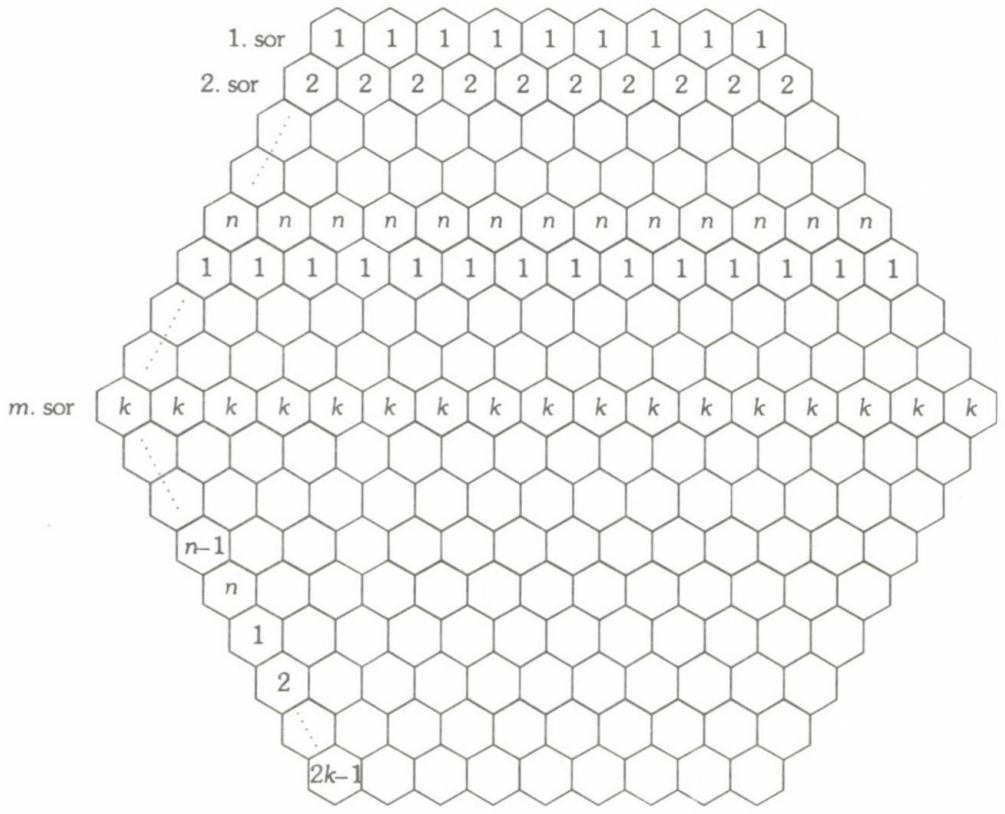
Tegyük fel, hogy a táblánk lefedhető ilyen lapokkal, és legyen $m = qn + k$. (Az $n \leq m$ feltétel az $m = 7$ esetben elmondottak miatt is igaz.)

Mivel $n \mid 3(m-1) \cdot m + 1$ feltétel szükséges, így $k \neq 0$ és $k \neq 1$. Emiatt $2 \leq k \leq n-1$.

A tábla mezőinek soronként azonos számozását az előbbiekhez hasonlóan végeztem, így felülről lefelé haladva az egyes sorokba a sor sorszáma (mod n) ($n = 0$) kerül (4. ábra).

Így a középső, $2m-1$ mezőt tartalmazó sor k jelű lesz. Az utolsó, $(2m-1)$-dik sor jele $2k-1$ (mod n) lesz, mivel $2m - 1 = 2qn + 2k - 1$.

Az előbbiekhez hasonlóan az $1 \times n$-es fedőlap itt is *vagy* csupa azonos, *vagy* csupa különböző számot fed le. Így az azonos számozású mezők számának n-es maradéka itt is egyenlő kell, hogy legyen.



4. ábra

Az $m-1$-dik és m-dik sorokon kívül vizsgáljuk meg külön-külön a $k-1$ ill. k jelű mezők számát. Az utolsó sor sem k sem $k-1$ számozású nem lehet, mert akkot:

$$2m-1 = nq_1 + k$$

vagy

$$2m-1 = nq_1 + k - 1$$

állna fenn.
Így viszont

$$2nq + 2k - 1 = nq_1 + k$$

vagy

$$2nq + 2k - 1 = nq_1 + k - 1,$$

ennek alapján viszont

$$n \mid k-1 \quad \text{vagy} \quad n \mid k$$

teljesülne, azaz $k = 1$ vagy $k = 0$ lenne. Ezeket az eseteket azonban már kizártuk.

Így az $(m-1)$-edik sor felett, és az m-edik sor alatt a k ill. $k-1$ jelű sorok azonos számban vannak. Mivel ezek szomszédosak, a k ill. $k-1$ jelű mezők száma azonos (az említett két „középső" mezőt nem vettük figyelembe).

Az $m-1$-edik sorban $k-1$ jelű, az m-edik sorban k jelű mezők vannak. Így e két sort vizsgálva, a k jelűek száma eggyel több a $k-1$ jelűeknél.

Az előbbiek figyelembevételével a teljes hatszögtáblán így 1-gyel több k jelű mező van, mint $k-1$ jelű. Így viszont e kétféle jelű mezőt tekintve a k ill. $k-1$ számozású mezők számának n-es maradéka nem lehet azonos, s emiatt a feltételezett lefedés nem lehetséges.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani Pogáts Ferencnek a cikk elkészítéséhez nyújtott segítségéért.

Irodalom

[1] Ross Honsberger: Mathematical Gems II., Math. Assoc. of America, évszám nélkül

Tóth Sándor

Ismét a hatszögtábláról

Bizonyára nem véletlen, hogy a hatszögek a legkedveltebb sokszögek közé tartoznak a diákság körében, különösen a szabályos hatszög. Hogy mennyire nem egyszerűen matematikai fogalomról van szó, mutatja az is, hogy az egyik legrégebbi játék, a sakk is felhasználja, s a hexa-sakknak már jelentős irodalma is van. A természetbeni előfordulás pedig közismert.

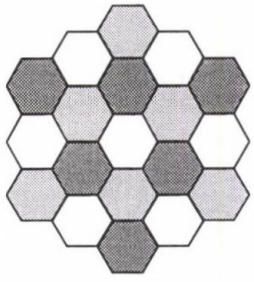
Matematikai szempontból érdekes lehet szimmetria tulajdonsága, de különösen az a tény, hogy viszonylag könnyű szerkeszteni, s az eljárás már általános iskolában ismert. Ezek után teljesen természetes, hogy a játékok egy része is kacsolatos a hatszögekkel (itt csak szabályosakról lesz szó). Az ilyen, köznapi értelemben is szabályos síkidomról óhatatlanul többet várunk, a szokásostól eltérő tulajdonságokat is remélünk.

A hatszögtábla teljesíti is az elvárásokat, némi vizsgálódással egészen érdekes eredményeket kaphatunk. A táblával kapcsolatos feladatok közül néhány már szerepelt a Matematika Tanítása 1993. januári számában. Az ottaniak szerint elég könnyedén lehet geometriai, trigonometriai, sorozatos, színezési, körbejárási, stb. alkalmazást találni a táblával kapcsolatban. Most eltérő megközelítésben vizsgáluk meg, de a meglepő észrevételek, tulajdonságok ezúttal sem hiányoznak. Egy részük levezethető a hatszögtáblából, s annak tulajdonságaiból, a többi azonban érdekesség, s nem mindig látható be törvényszerű volta. Az viszont közös bennük, hogy mindegyik felvetés továbbvihető, azaz némi időráfordítással újabb eredményekhez juthatunk. A kérdések feltevése remélem érdekesnek tűnik diákszemmel is, s otthoni munkára is kiválóan alkalmas. A munka elindításához remélem jó ötletek találhatók a következőkben.

Az a tény, hogy a sík szabályos hatszögekkel hézagmentesen lefedhető, alapot ad a hatszögtáblával kapcsolatos vizsgálódásokhoz, de egyúttal azt is jelzi, milye mélyebb értelmezés is lehetséges, milyen más területekre vezethet el ez a viszonylag egyszerűen megérthető témakör.

Emlékeztetésképpen: egysényi oldalú, szabályos hatszögek oldalak mentén történő egymáshoz illesztésével kapjuk, a hatszögtáblát. Valahogy úgy, hogy egyetlen kis haszögből indulva, újabb és újabb gyűrűket vonunk köré, szintén hatszögekből. m-esnek nevezzük a táblát, ha oldalait m darab kis hatszög alkotja, melyeket mezőknek nevezünk.

A tulajdonságok közül használni fogjuk azt, hogy a tábla három színnel helyesen színezhető (1. ábra), valamint azt, hogy az m-es hatszögtáblát $3m(m-1)+1$ darab kis hatszög alkotja (bizonyítása a januári számban).



1. ábra

1. A legegyszerűbb kérdések szinte ránézésre adódnak, például az, mekkora az m-es hatszögtábla kerülete és területe

Kerületen azon hatszög-oldalhosszak összegét értjük, melyek nem belső szakaszai a táblának. Ennek nagysága a „külső gyűrűn" levő hatszögek számától függ. Könnyen belátható, hogy ezek száma m-es táblánál $6(m-1)$, s így a kerület

$$K = 12(m-1).$$

A területhez mindössze egy hatszög területét kell kiszámítani, s szorozni számukkal, ami az előzőek szerint $3m(m-1)+1$.

A terület tehát (m-es tábla):

$$[3m(m-1)+1]\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

2. A három színnel helyesen színezett táblánál képezzük a 2. ábra szerinti háromszögeket, melyeket azonos színű hatszögek középpontjai határoznak meg. A háromszög-sorozattal kapcsolatosan megvizsgálható az oldalhosszak, a kerületek, a területek sorozata, mint végtelen sorozatok. Ha a táblát elhagyjuk, s csak a háromszögeket tartjuk meg, egy ismert ábrához jutunk, mely a mértani sorozatokkal kapcsolatban szerepel a feladatgyűjteményekben. Az oldalhosszak sorozata:

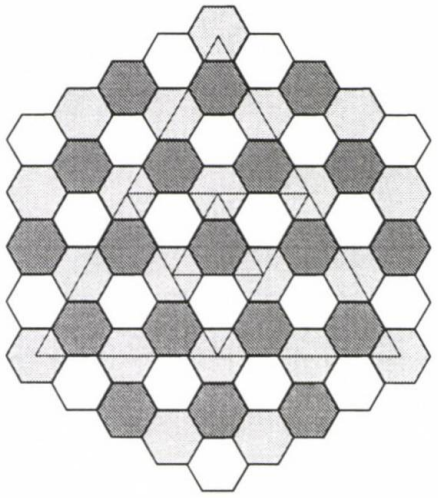
3, 6, 12, 24, 48, ...;

Vagyis mértani sorozat, s ugyanez igaz a kerületre és a területre is. Ezek után ki ne tudna újabb kérdéseket feltenni a sorozatokra? Különösen ha figyelembe vesszük, hogy hasonló dolog a „kockás" mezők vizsgálata, de itt hatszögekkel van dolgunk.

3. Most pedig a tábla olyan tulajdonságait tekintjük, melyek elsősorban számelméleti tartalommal bírnak. Ehhez az 1. táblázatot használjuk. A 2. oszlopban a tábla oldalhossza, vagyis m értékei, a 3. oszlopban pedig a mezők száma, azaz $3m(m-1)+1$ értékei szerepelnek. Az 1. és 4. oszlopban p jelzi azt, ha m ill. $3m(m-1)+1$ értéke prímszám. Az 5-15. oszlopokban az szerepel, hogy a mezők száma (tehát $3m(m-1)+1$ értékei) milyen maradékokat adnak az egyes számokkal osztva. Itt k minden egyes esetben egy alkalmas természetes számot jelöl, tehát nem mindig ugyanaz az értéke.

A 4. oszlopot szemügyre véve azonnal feltűnik, hogy bár helyhiány miatt csak 35-ig vizsgáljuk a hatszögtáblákat, rendkívüli módon sűrűsödnek a prímszámok. Azonnal adódik a kérdés, s házi feladatként megvizsgálandó a következő állatís igazságtartalma:

A $3m(m-1)+1$ alakú számok között végtelen sok prímszám van (m pozitív egész)!



2. ábra

4. Ha megvizsgáljuk a $3m(m-1)+1$ kifejezést, m és $m-1$ egymást követő egészek lévén, az egyik páros, így $3m(m-1)$ osztható hattal. Az 1. táblázat 3. oszlopában szereplő értékeket felírva $6k+1$ alakban, s az egymás utáni k értékek pozitív különbségeit véve, a természetes számok sorozatát kapjuk 2-vel kezdődően (2. táblázat). A k értékek pedig egy számtani sorozat első néhány tagjának összegét jelentik.

A magyarázat nem túl bonyolult, ha egy kissé átalakítjuk a kifejezést:

$$3m(m-1)+1=6\frac{m(m-1)}{2}+1$$

$\frac{m(m-1)}{2}$ pedig egy számtani sorozat első $m-1$ tagjának összege, ahol az első tag és a differencia 1.

5. Maradva a 3. oszlopnál, az utolsó jegyek ismétlődnek, meghozzá 7, 9, 7, 1, 1 periódussal. Indokoljuk meg, mi a jól meghatározott matematikai oka ennek!

Vizsgálva a két utolsó jegyet, a hetesre és egyesre végződő számoknál nincs semmi különleges. A kilencesre végződőek annál érdekesebbek, mert itt a végződés mindig 19 vagy 69. Ezt mi indokolja?

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
p	2	7	p	$2k+1$	$3k+1$	$4k+3$	$5k+2$	$6k+1$	$7k$	$8k+7$	$9k+7$	$10k+7$	$11k+7$	$12k+7$
p	3	19	p	"	"	$4k+3$	$5k+4$	"	$7k+5$	$8k+3$	$9k+1$	$10k+9$	$11k+8$	$12k+7$
	4	37	p	"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k+2$	$8k+5$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+4$	$12k+1$
p	5	61	p	"	"	$4k+1$	$5k+1$	"	$7k+5$	$8k+5$	$9k+7$	$10k+1$	$11k+6$	$12k+1$
	6	91		"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k$	$8k+3$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+3$	$12k+7$
p	7	127	p	"	"	$4k+3$	$5k+2$	"	$7k+1$	$8k+7$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+6$	$12k+7$
	8	169		"	"	$4k+1$	$5k+4$	"	$7k+1$	$8k+1$	$9k+7$	$10k+9$	$11k+4$	$12k+1$
	9	217		"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k$	$8k+1$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+8$	$12k+1$
	10	271	p	"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k+5$	$8k+7$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+7$	$12k+7$
p	11	331	p	"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k+2$	$8k+3$	$9k+7$	$10k+1$	$11k+1$	$12k+7$
	12	397	p	"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k+5$	$8k+5$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+1$	$12k+1$
p	13	469		"	"	$4k+1$	$5k+4$	"	$7k$	$8k+5$	$9k+1$	$10k+9$	$11k+7$	$12k+1$
	14	547	p	"	"	$4k+3$	$5k+2$	"	$7k+1$	$8k+3$	$9k+7$	$10k+7$	$11k+8$	$12k+7$
	15	631	p	"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k+1$	$8k+7$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+4$	$12k+7$
	16	721		"	"	$4k+1$	$5k+1$	"	$7k$	$8k+1$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+6$	$12k+1$
	17	817		"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k+5$	$8k+1$	$9k+7$	$10k+7$	$11k+3$	$12k+1$
	18	919	p	"	"	$4k+3$	$5k+4$	"	$7k+2$	$8k+7$	$9k+1$	$10k+9$	$11k+6$	$12k+7$
p	19	1027		"	"	$4k+3$	$5k+2$	"	$7k+5$	$8k+3$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+4$	$12k+7$
	20	1141		"	"	$4k+1$	$5k+1$	"	$7k$	$8k+5$	$9k+7$	$10k+1$	$11k+8$	$12k+1$
	21	1261		"	"	$4k+1$	$5k+1$	"	$7k+1$	$8k+5$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+7$	$12k+1$
	22	1387		"	"	$4k+3$	$5k+2$	"	$7k+1$	$8k+3$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+1$	$12k+7$
p	23	1519		"	"	$4k+3$	$5k+4$	"	$7k$	$8k+7$	$9k+7$	$10k+9$	$11k+1$	$12k+7$
	24	1657	p	"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k+5$	$8k+1$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+7$	$12k+1$
	25	1801	p	"	"	$4k+1$	$5k+1$	"	$7k+2$	$8k+1$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+8$	$12k+1$
	26	1951	p	"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k+5$	$8k+7$	$9k+7$	$10k+1$	$11k+4$	$12k+7$
	27	2107		"	"	$4k+3$	$5k+2$	"	$7k$	$8k+3$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+6$	$12k+7$
	28	2269	p	"	"	$4k+1$	$5k+4$	"	$7k+1$	$8k+5$	$9k+1$	$10k+9$	$11k+3$	$12k+1$
p	29	2437	p	"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k+1$	$8k+5$	$9k+7$	$10k+7$	$11k+6$	$12k+1$
	30	2611		"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k$	$8k+3$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+4$	$12k+7$
p	31	2791	p	"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k+5$	$8k+7$	$9k+1$	$10k+1$	$11k+8$	$12k+7$
	32	2977		"	"	$4k+1$	$5k+2$	"	$7k+2$	$8k+1$	$9k+7$	$10k+7$	$11k+7$	$12k+1$
	33	3169	p	"	"	$4k+1$	$5k+4$	"	$7k+5$	$8k+1$	$9k+1$	$10k+9$	$11k+1$	$12k+1$
	34	3367		"	"	$4k+3$	$5k+2$	"	$7k$	$8k+7$	$9k+1$	$10k+7$	$11k+1$	$12k+7$
	35	3571	p	"	"	$4k+3$	$5k+1$	"	$7k+1$	$8k+3$	$9k+7$	$10k+1$	$11k+7$	$12k+7$

1. táblázat

6. Tekintsük a 3. oszlop nem prím elemeit. Ezek közül:

$91 = 7 \cdot 13$, $721 = 7 \cdot 103$,
$1027 = 13 \cdot 79$, $217 = 7 \cdot 31$,
$2107 = 7 \cdot 301$, $1261 = 13 \cdot 97$.

A szorzatokban két jegyet felcserélve ismét $3m(m-1)+1$ alakú számot kapunk. A felcserélt jegyek különbsége mindig 2. Hasonlóan:

$1387 = 19 \cdot 73$ és $3367 = 91 \cdot 37$

Vannak-e hasonló párok, vagy ez csak véletlen egybeesés?

7. A 4. pont szerint a mezők száma 2-vel, 3-mal és hattal osztva mindig 1 maradékot ad. Megvizsgálva a többi osztási maradékot (7., 8., 10-15. oszlopok), észrevehetjük, hogy periodikusan ismétlődnek. A 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 8-

cal, 11-gyel való osztásnál a periódushossz rendre 4, 5, 7, 8, 11, de a kilencesnél ez 3, a tizesnél 5, a tizenkettesnél pedig 4. Ha tovább folytatnánk ezt, teljesen hasonló következtetésre jutnánk.

$3m(m-1)+1$	$6k+1$	k	különbség
7	$6\cdot 1+1$	1	–
19	$6\cdot 3+1$	3	2
37	$6\cdot 6+1$	6	3
61	$6\cdot 10+1$	10	4
91	$6\cdot 15+1$	15	5
127	$6\cdot 21+1$	21	6
169	$6\cdot 28+1$	28	7
217	$6\cdot 36+1$	36	8
271	$6\cdot 45+1$	45	9
331	$6\cdot 55+1$	55	10
397	$6\cdot 66+1$	66	11
469	$6\cdot 78+1$	78	12
547	$6\cdot 91+1$	91	13
631	$6\cdot 105+1$	105	14
721	$6\cdot 120+1$	120	15
817	$6\cdot 136+1$	136	16
919	$6\cdot 153+1$	153	17
1027	$6\cdot 171+1$	171	18
1141	$6\cdot 190+1$	190	19
1261	$6\cdot 210+1$	210	20
1387	$6\cdot 231+1$	231	21
1519	$6\cdot 253+1$	253	22
1657	$6\cdot 276+1$	276	23
1801	$6\cdot 300+1$	300	24
...	...	...	...

2. táblázat

Ennek indoka akkor derül ki világosan, ha megvizsgáljuk a $3(m+k)(m+k-1)+1$ (k természetes szám) kifejezést:

$$3(m+k)(m+k-1)+1 = \\ = 3m(m-1)+1+6mk+3k^2-3k.$$

Ebből az alakból már látható, hogy mivel az tolsó három tag k-val osztható $3(m+k)(m+k-1)+1$ k-val osztva ugyanazt a maradékot adja, mint a $3m(m-1)+1$. Ez garantálja a maradékok periodikusságát, de ne feledjük el, hogy a periódushossz nem feltétlenül k (a k-val való oszthatóságot vizsgálva), lehet attól kisebb egész is (lásd a 12. 13. oszlopot). Nyilván a

$$6mk+3k^2-3k$$

kifejezést kell vizsgálnunk.

8. Pusztán a periódusokban lévő maradékokat tekintve, újabb érdekességet látunk. Egy perióduson belül (melyek hossza legalább kettő), a két utolsó maradék minden esetben 1. Pontosan azért mert minden periódusnál ez igaz, nem lehet véletlen az egybeesés.

Vizsgáljuk tehát egy adott pozitív egésszel, a k-val való oszthatóságát a $3m(m-1)+1$ alakú számoknak. Tekintsük a km és $km+1$ értékeket, a hozzáuk tartozó hatszögtábla mezőinek száma:

$$3km(km-1)+1 \quad \text{ill.} \quad 3(km+1)km+1$$

Teljesen nyilvánvaló, hogy ezen értékek táblázatunkban egymás utáni sorokban szerepelnek, s k-val osztva mindkettő 1 maradékot ad. Ez az oka a tapasztalt ismétlődéseknek.

9. Ha megnézzük azt, hogy van-e olyan hatszögtábla, amelyre igaz, hogy mezőinek száma egyszerre $2k+1$, $3k+1$, ..., $mk+1$ alakú, szokatlan eredményre jutunk. Nevezetesen akárhogy is adjuk meg az m pozitív egészet (m legalább 2), mindig létezik a kívánt tulajdonságú tábla!

Számelméleti megfogalmazásban ez az állítás így hangzik:

Legyen n tetszőleges, kettőnél nem kisebb pozitív egész. Mindig létezik hozzá olyan m, szintén pozitív egész, melyre $3m(m-1)+1$-et osztva a 2, 3, ..., n értékekkel, maradékul mindig 1-et kapunk.

Az eddigiek alapján ez is könnyen belátható, hisz tekintsük a 2-es, 3-as, ..., n-es hatszögtáblákat, s vegyük az osztási maradékok által meghatározott periódushosszakat, mégpedig a 2, 3, ..., n-nel való oszthatóságnál. A 7. szerint ezek mind léteznek. Legyen ezek legkisebb közös többszöröse s. Az 1. táblázatot kibővítve, a bővebb alakzat s-edik sorában $s+1$ szerepel m értékeként, s ilyen m választással valóban teljesülnek a kívánt tulajdonságok: $3(s+1)s+1$. A 8. pont szerint tovább is

pontosítható a tétel. Azaz a kívánt tulajdonságú m nem egyértelműen létezik, hisz többszörösei is hasonló tulajdonságúak, s ha m megfelelő, akkor $m-1$ is (8. pont).

Ez a tulajdonság teljesen természetes a természetes számok halmazában, de a $3m(m-1)+1$ alakú számok között elég meglepő, különösen az, hogy m és $m-1$ egyszerre megfelel az elvárásoknak.

10. A számelméleti vizsgálódáskat nagyon sokáig lehetne folytatni, de minden esetre igaz, hogy nem az érdekességek észrevétele okozza a gondot, hanem egyes esetekben a matematikai háttér kiderítése, azaz az indoklás. Ilyen célzattal ajánlanék egy-két vizsgálható kérdést:

- Az 1. táblázat 7. és 15. oszlopában kétféle maradék van, kettesével ismétlődnek (felváltva). Igaz-e ez minden 4 hosszúságú periódusra?
- A 8. és 13. oszlopban az első három maradék szimmetrikus a középsőre, a két utolsó pedig természetesen 1. Igaz ez mindig, ha 5 többszöröseivel való oszthatóságot vizsgálunk?
- A 10., 11., 14. oszlopokban a maradékok egy rövid szakasz után fordított sorrendben megismétlődnek. Törvényszerű ez?
- Derítsük ki az 1. táblázatban k értékeit. Egy újabb cikkre való érdekesség kerül elő.
- A 3. oszlopban szereplő számoknak adjuk össze a jegyeit, s mindezt folytassuk addig, amíg egyjegyű számot nem kapunk. A következő sorozatot kapjuk: 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, 1, 1, 7, ... Ez is periódikus (7, 1, 1), s még érdekesebb az a tény, hogy ugyanez a három érték ismétlődik ugyanilyen sorrendben a kilenccel való oszthatóságnál, azaz a 12. oszlopban!
- S ha most a 3. oszlopbeli számok közül a már említett 9-re végződőeket megnézzük, s megvizsgáljuk, hogy a hozzájuk tartozó m értékek (2. oszlop) prímszámok-e vagy sem, a következő sorozatot kapjuk (p: prim, n: nem prim):

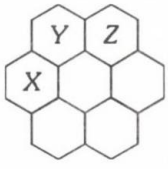
  p, n, p, n, p, n, n, n, p, n, p, n, n, n, p, n, p, n, n, n, ...

  Úgy tűnik, a p, n, p, n, n, n, szakasz ismétlődik. Valóban így van?

A nyitva hagyott kérdések továbbgondolása, a be nem bizonyított állítások belátása, azt gondolom elég vonzó feladatot jelenthet a diákok számára is, különösen azért, mert a számelméleti jellegű vizsgálódások közelebb állnak hozzájuk. Néhány egyszerű frappáns eredmény talán megjelenhet a lap hasábjain is. Különösen a legutóbbi észrevétel mutat rá arra, hogy a hatszögtáblának komoly primszámelméleti vonatkozásai vannak, de erre ebben az írásban nem tértem ki.

S végezetül nézzük a hatszögtábla egy elég könnyed felhasználási módját, ami játékos volta miatt igen népszerű volt, és talán még lehet is, de éppen ezért elég komoly elméleti háttere van.

Általános iskolában szinte mindenki találkozik a bűvös négyzetekkel, s a későbbiekben is folytathatja nagyobb méretekben megalkotását. Hasonló kérdések merülnek fel a hatszögtáblával kapcsolatosan is, azaz kérdés, van-e bűvös hatszögtábla?



3. ábra

Ez olyan hatszögtáblát jelent, melybe 1-gyel kezdődően beírjuk az egymást követő pozitív egészeket úgy, hogy a beírt számok összege minden egyenes mentén ugyanannyi legyen. Könnyen megmutatható, hogy 2-es hatszögtábla nem felel meg a feltételeknek (3. ábra), hiszen az adott jelölés mellett:

$$X+Y=Y+Z$$

s innen

$$X=Y$$

ami nem lehet.

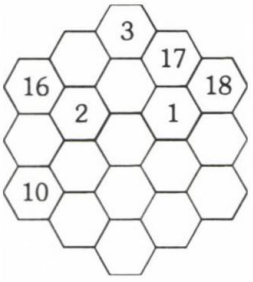
Hosszú idő után, s elég fáradságos út megtételével sikerült belátni azt, hogy a bűvös 3-as hatszögtábla létezik. Vagyis a 3-as tábla 19 mezőjébe be lehet írni az 1, 2, ..., 19 számokat úgy, hogy minden egyenes mentén az összegük 38.

Meglepő eredmény az, hogy enél nagyobb méretű bűvös hatszögtábla már nem létezik. Bizonyítsuk is be ezt!

Mélyebb összefüggések iránt érdeklődők figyelmébe ajánlom annak belátását, hogy szimmetriától eltekintve a létező 3-as bűvös tábla számait nem lehet úgy átrendezni, hogy asonló tulajdonságú táblát kapjunk. Azaz mindössze egy bűvös hatszögtábla létezik, s az egyértelmű is, a nyilvánvaló szimmetriáktól eltekintve.

S mindezek szemléltetésére egy feladat:

A 4. ábrába előre beírtam néhány számot. Egészítsük ki a hiányzó egészekkel úgy, hogy megkapjuk az egyetlen bűvös hatszöget!



4. ábra

Török Tamás

Szemléltetés szöges-lyukas táblán

(Az elmélet, mint módszertan)

Az alsó tagozat matematikatanításában közismert szemléltető eszköz a szöges-lyukas tábla. Kiválóan alkalmas a tevékenységen alapuló ismeretelsajátításra.

Négyzethálós elrendezésben 21×21 db lyukat tartalmaz, amelyek egymástól 1 cm távolságra helyezkednek el. A – valamilyen feladat szempontjából kitüntetett – rácspontokat szögek beszúrásával tudjuk kijelölni, ezeket pedig különböző hosszúságú gumikarikák segítségével körülkeríteni.

Egy tetszőlegesen kiválasztott sor, ill. oszlop mentén 1, 2, ..., maximum 20 cm-es hosszúságokat állíthatunk elő.

Fontos és hasznos, hogy az eszköz használója, a tanító tisztában legyen néhány alapvető lehetőséggel; tudja mire használható és mire nem a szöges-lyukas tábla. Bizonyos ismeretek feltétlenül szükségesek ahhoz, hogy a tanulói tevékenységeket irányítani tudjuk, hogy felismerjük milyen témakörök tanításánál használhatjuk sikerrel ezt az eszközt. Másfelől az elméleti háttérismeretek jelentős része egyúttal magát a módszertant is jelentik.

A szöges-lyukas tábla felhasználási lehetőségei nem találhatók meg sem a szűkszavú eszközleírásban, és nem vagy csak érintőlegesen vizsgáljuk azokat a tanítóképzés folyamatában a rácsgeometria tanításakor.

Jelen cikkben természetesen nem vállalkozhatunk arra, hogy az összes lehetőséget bemutassuk, bár egy témacsoportonként rendszerező áttekintés is igen hasznos lenne.

Először összefoglaljuk a négyzetrács alapvető tulajdonságait és szemléltetjük is ezeket szöges-lyukas táblán, majd az alábbi kérdésekre keresünk választ[1]:

1. Milyen egész hosszúságú rácsszakaszokat lehet megjeleníteni ferdén, azaz nem azonos sorra, ill. oszlopra illeszkedő végpontok esetén?
2. Milyen (nem egész) hosszúságú ferde rácsszakaszokat lehet többféleképpen is előállítani?

[1] Egy másik problémakört: szöges-lyukas táblán megadható leszámlálási algoritmusokat vizsgál [4].

3. A kifeszíthető egyenlő szárú háromszögek hogyan osztályozhatók?
4. Kifeszíthetők-e egyenlő oldalú-, ill. szabályos rácssokszögek?

A négyzetrács alapvető tulajdonságai

a) Rácspont (P) bármely másik rácspont (O) körüli 90 °-os elforgatottja is rácspont (P').

b) Rácspont (P) egy tetszőleges rácsvektorral ($\mathbf{v}$) eltolva rácspontba (P') megy át.

c) Rácspontot (P) egy tetszőleges rácsszakasz (AB) felezőpontjára (F) tükrözve is rácspontot (P') kapunk.
Az $A(a_1, a_2)$ és a $B(b_1, b_2)$ pontok felezési pontja:

$$F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right).$$

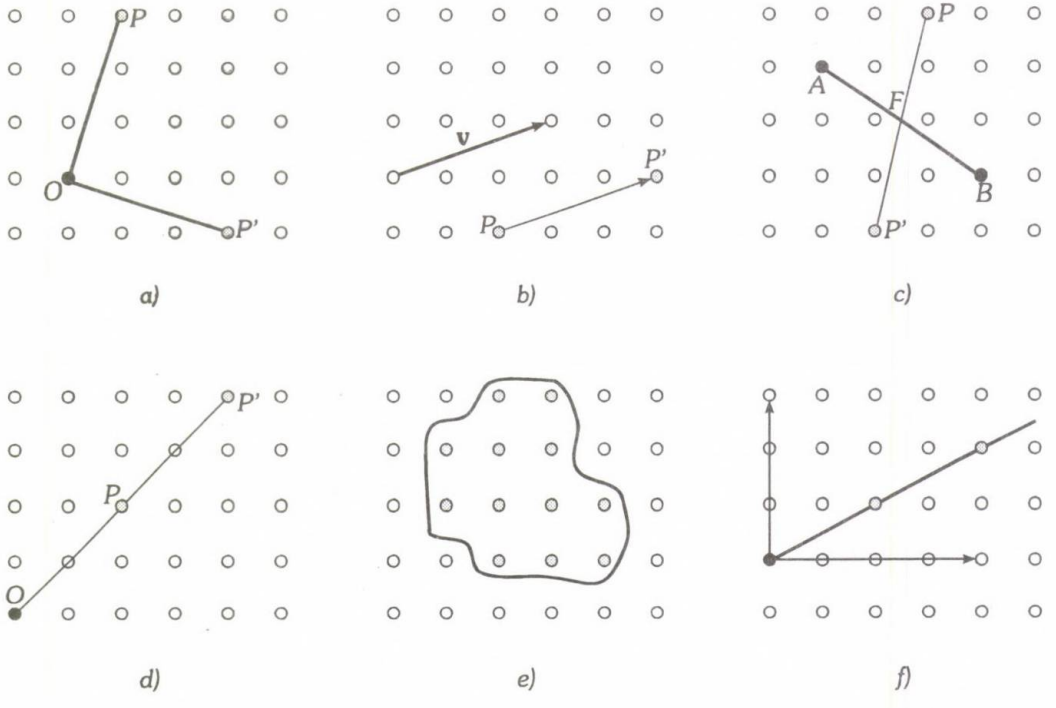
$P(x, y)$-nak F-re vonatkozó tükörképe: $P'(a_1 + b_1 - x, a_2 + b_2 - y)$ egész koordinátái miatt szintén rácspont.

d) Egész arányú középpontos nagyítás rácspontot rácspontba visz át.

e) Korlátos alakzat csak véges sok rácspontot tartalmazhat.

f) Egy rácsponton átmenő egyenes vagy csak ezt az egyetlen rácspontot tartalmazza, vagy végtelen sokat.
Ha az origót a rácspontba toljuk, akkor az egyenes egyenlete: $y = mx$ alakú. Ha m irracionális, akkor csak a (0, 0) rácspont lehet rajta, ha viszont m racionális ($\frac{p}{q}$ alakú), akkor az egyenes minden (kp, kq) alakú rácsponton (k egész szám) átmegy.

Az 1. ábra az *a)-f)* tulajdonságokat szemlélteti. Ezeknek az elemi tulajdonságoknak az ismerete szinte önmagától kínálja az eszközhasználatban rejlő lehetőségek egy bizonyos körét.



1. ábra

Az *a)* tulajdonság alkalmassá teszi a szögeslyukas táblát a 90 °-os elforgatás bemutatására, mégpédig tetszóleges *O* pont és alakzat esetén (Csak arra kell vigyáznunk, hogy az elforgatott alakzat is elférjen.).

Azt is felismertethetjük, hogy két derékszöggel való elforgatás eredménye középpontos tükrözés, ill. 360 °-os elforgatás egy alakzat minden pontját önmagába visz át.

Ha egyetlen pontot (*P*) háromszor egymás után egy *O* pont körül 90 °-kal elforgatunk, akkor (*P*-vel együtt) egy négyzet négy csúcsát jelöljük ki, egyidejűleg szemléltetve átlóit és középpontját.

Ha *P*-t és *O*-t nem azonos sorban, ill. oszlopban jelöljük ki, akkor „ferde" négyzeteket állíthatunk elő (2. ábra *a)*).

Az eltolási utasítás a szöges-lyukas tábla jellegéből adódóan egy számpár (*a*, *b*) közlésével válik egyértelművé, ha megállapodunk abban, hogy *a* és *b* azt mutatja mennyit lépjünk jobbra és felfelé. Ha *a*, ill. *b* negatív, akkor balra, ill. lefelé visszük a pontot. Egy ilyen számpáros lejegyzés egyrészt a negatív számok gyakoroltatását segíti, másrészt szemlélteti, hogy minden ferde eltolás helyettesíthető egy vízszintes és egy függőleges irányú (tetszőleges sorrendben végrehajtható) eltolás egymásutánjával.

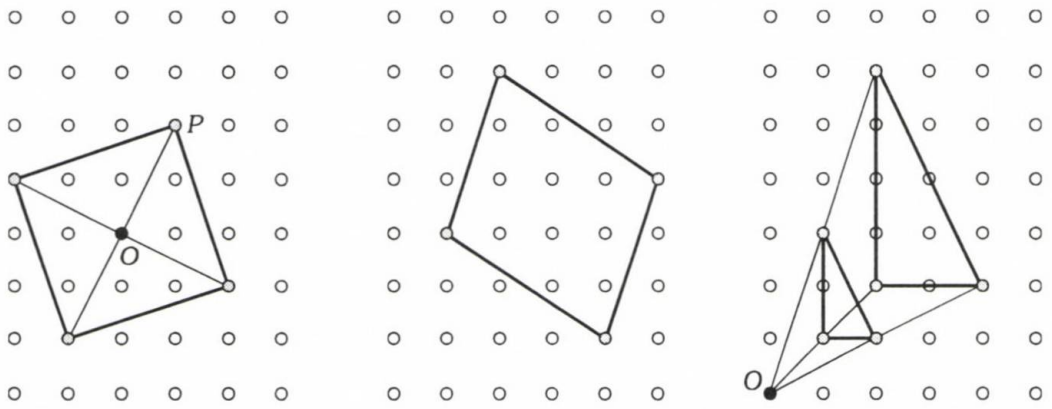
Ha szakaszt tolunk el nem önmagával párhuzamos irányban és a négy pontot körülgumizzuk, akkor paralelogrammát kapunk, és fordítva: kérdezhetjük, hogy egy kifeszített paralelogramma párhuzamos oldalpárjai milyen eltolással vihetők át egymásba (2. ábra *b)*).

Szintén paralelogrammát állíthatunk elő, de más módon a *c)* tulajdonság segítségével. Akár feladatként is adhatjuk a paralelogramma előállítását az *AB* átló és egy harmadik csúcs (*P*) ismeretében. Szemléltethetjük, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást, sőt magát a *c)* tulajdonságot is felfedeztethetjük, még abban a (nem triviális) esetben is, amikor *F* nem esik rácspontra.

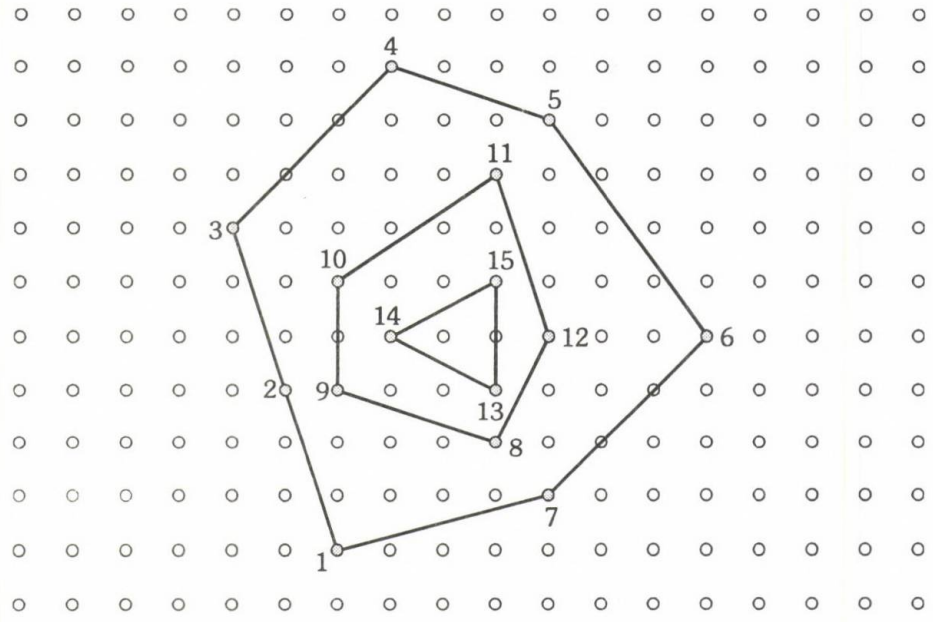
A középpontos nagyítás végrehajtásához (az eltoláshoz hasonlóan) számpárokkal jegyezhetjük le a pontok transzformáció előtti és utáni viszonyát *O*-hoz képest (2. ábra *c)*).

Az *e)* tulajdonság a gyerekek számára azt jelenti, hogy leszámlálással meg is határozzák a beszúrt szögek számát. A 3. ábra *a)* és *b)* része konvex burkoló, ill. konkáv tartalmazó sokszög menti leszámlálásokat szemléltetnek. Ennek a módszernek részletes leírása megtalálható [4]-ban.

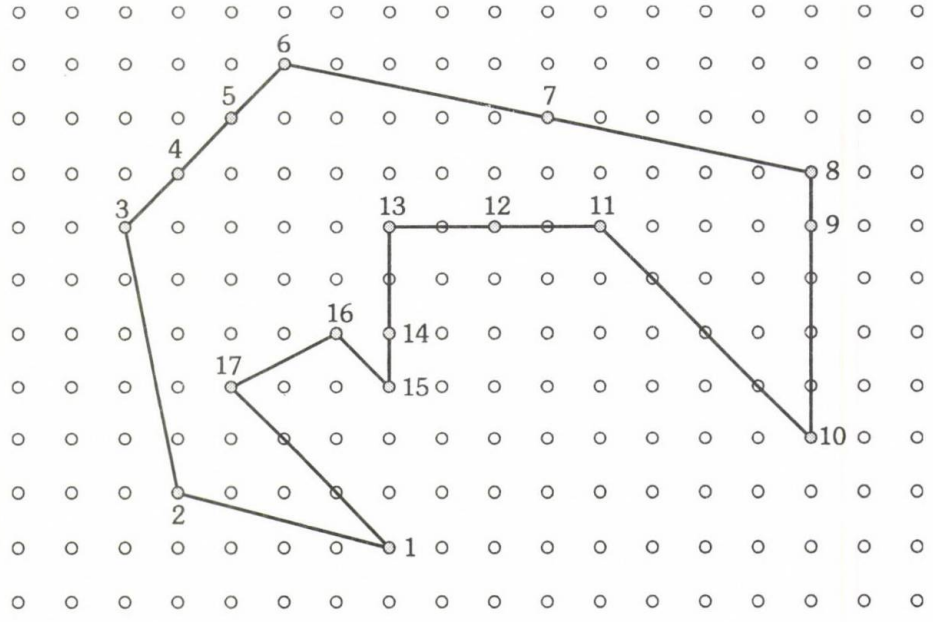
Az *f)* tulajdonság bemutatása két esetet jelent. Ha az egyenes végtelen sok rácsponton megy át, akkor – szintén a számpáros lejegyzési formát választva – valamelyiküket (0, 0)-nak elnevezve egy végtelen számsorozatot kapunk, még akkor is, ha a szöges-lyukas táblán csak véges sok rácspontját tudjuk kijelölni.



2. ábra



a)



b)

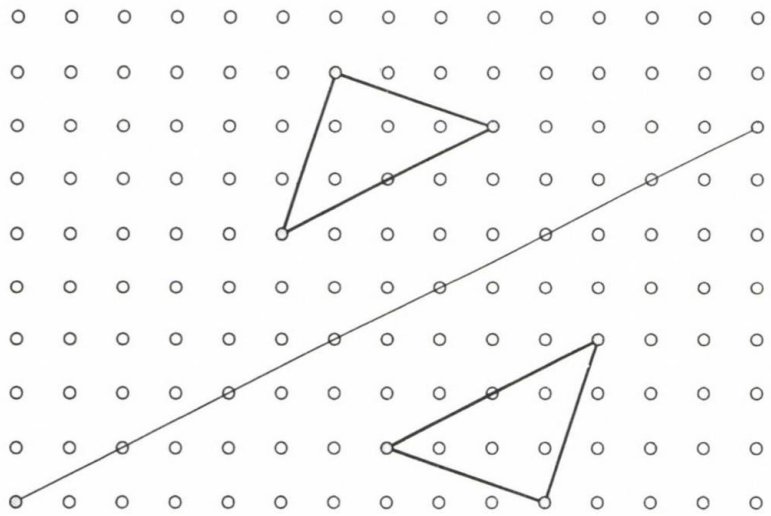
3. ábra

Nehéznek tűnik alsó tagozatban megmutatni a másik esetet, miszerint van olyan egyenes, ami csak egyetlen rácsponton megy át. Azt viszont könnyű beláttatni, hogy van olyan egyenes, ami nem tartalmaz rácspontot (pl. $y = x + \frac{1}{2}$).

Azt általában nem állíthatjuk, hogy egy tetszóleges rácsegyenes, mint tengely kijelölésekor minden rácspont tükörképe is rácspont lesz. Viszont tetszőlegesen felvett (két rácspontra támaszkodó) rácsegyenes esetén is végtelen sok olyan rácspontot találhatunk a négyzetrácson, aminek erre vonatkozó tükörképe is rácspont.

Ilyen pontokhoz juthatunk például, ha a kiválasztott tengelyünk rácspontjait bármely másik rácspont körül 90 °-kal elforgatjuk.

Ez az ismeret pedig elégséges ahhoz, hogy akár ferdén felvett tengely esetén is bemutathassuk a tengelyes tükrözést és tulajdonságait szöges-lyukas táblán (4. ábra).



4. ábra

Egész hosszúságok előállítása

Egy ferde rácsszakasz hossza (c) csak akkor lehet egész szám, ha a hozzá tartozó derékszögű háromszög befogóival (a és b) pitagorászi számhármast alkot ($a^2 + b^2 = c^2$; ahol a, b, c pozitív egész) (5. ábra).

Alapszámhármasnak nevezzük azokat az a, b, c pitagoraszi számhármasokat, amelyek relatív prímek.

Ismert (megtalálható például (2)-ben) az alapszámhármasok következő előállítása:

Ha kiválasztunk két tetszőleges, 0-nál nagyobb, páratlan, relatív prímet (m-et és n-et; $m > n$), akkor az

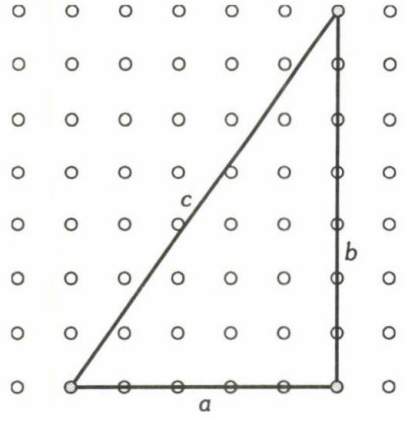
$$a = mn,\ b = \frac{m^2 - n^2}{2},\ c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

képletek alapján számított mennyiségek alaphármast alkotnak[2]. Ezzel az eljárással az összes lehetséges alaphármast megkaphatjuk.

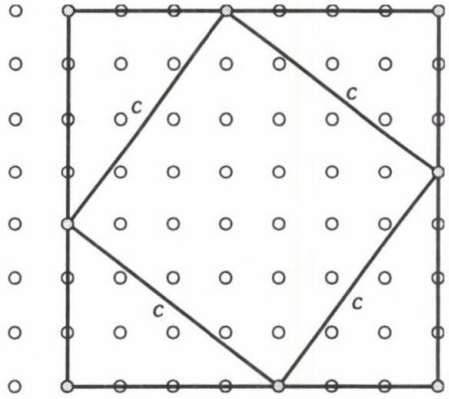
Figyelembe véve, hogy szöges-lyukas táblán $a, b \leq 20$, ezért össyesen csak három alaphármast találunk (1. táblázat). Ez kiegészül az első alaphármas többszöröseivel, tehát szöges-lyukas táblán mindössze csak 7 db egész hosszúságot tudunk „ferdén" előállítani.

Ezek közül egy ilyen ferde rácsszakasz egész hosszúságának (c) beláttatásában segít a 6. ábra.

[2] Az összes pitagorászi számhármas az $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$ $(p > q;\ p, q \in \mathbb{N})$ képletek segítségével is előállíthatók.



5. ábra



6. ábra

Ennek alapján a $c \cdot c = 7 \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$ $= 25$ nyitott mondatból c csak 5 lehet.

m	n	a	b	c
3	1	3	4	5
		6	8	10
		9	12	15
		12	16	20
		15	20	25
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17

1. táblázat

Ferde rácsszakaszok többféle előállítása

Ha egy ferde rácsszakasz hosszát c, a hozzá tartozó derékszögű rácsháromszög befogóit a és b jelöli, akkor azt kérdezzük, hogy a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés adott c esetén milyen a-ra és b-re teljesül[3]. Másképpen fogalmazva: Milyen ferde rácshosszúságok állíthatók elő többféleképpen is szöges-lyukas táblán?

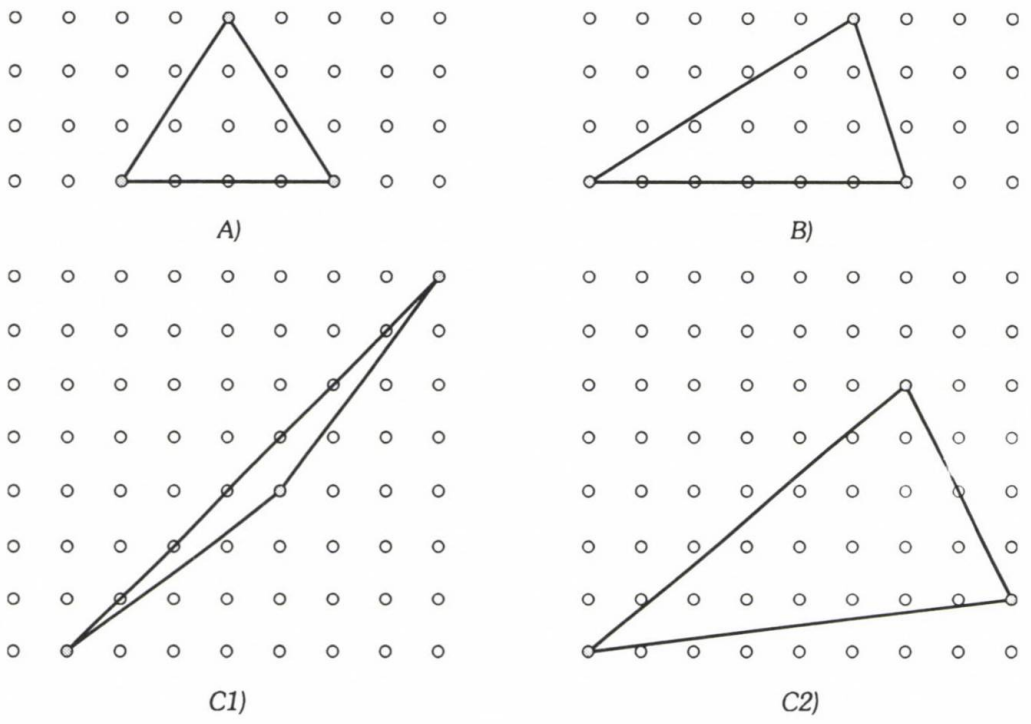
[3] A feltett kérdéshez hasonló problémát: az $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$) diofantikus egyenlet általános megoldhatóságát vizsgálja [1].

a	b	$a^2 + b^2$	a	b	$a^2 + b^2$
1	7		3	16	
5	5	50	11	12	265
1	8		3	19	
4	7	65	9	17	370
1	12		4	13	
8	9	145	8	11	185
1	13		4	17	
7	11	170	7	16	305
1	17		4	18	
11	13	290	12	14	340
1	18		4	19	
6	17		11	16	377
10	15	325	5	14	
2	9		10	11	221
6	7	85	5	15	
2	11		9	13	250
5	10	125	5	20	
2	14		8	19	
10	10	200	13	16	425
2	16		7	17	
8	14	260	13	13	338
2	19		7	19	
13	14	365	11	17	410
3	11		8	19	
7	9	130	13	16	425
3	14		9	20	
6	13	205	15	16	481

2. táblázat

Egy egyszerű számítógépes program segítségével megnéztük és táblázatba foglaltuk ezeket az $a^2 + b^2$ $(1 \le a \le b \le 20)$ négyzetösszegeket, ill. a hozzájuk tartozó különböző előállításokat (2. táblázat).

Meglepő módon két olyan hosszúságot is találtunk (ezek négyzete 325 és 425), amelyeket háromféleképpen is előállíthatunk.



7. ábra

Egyenlő szárú rácsháromszögek előállítása

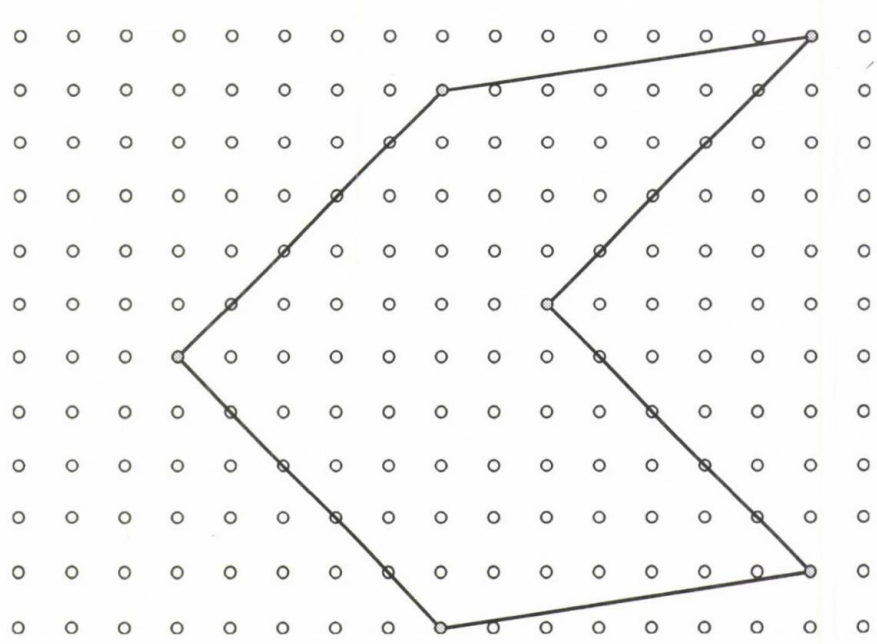
Az azonos (egész és nem egész) hosszúságok (egy- és többféle) előállításának eddigi vizsgálatából a körülgumizható egyenlő szárú háromszögek alábbi (egy lehetséges) osztályozása következik:

A) A háromszög alapja azonos sorra vagy oszlopra illeszkedő rácsszakasz.
Ebben az esetben az alap nyilván csak páros hosszúságú lehet.

B) A háromszög (legalább) egyik szára azonos sorra vagy oszlopra illeszkedő rácsszakasz.
Mivel itt a szár egész hosszúságú, ezért csak az 5, 10, 13, 15, 17, 20 cm-es hosszúságok jöhetnek számításba. Az ilyen háromszögek kifeszítését segíti az 1. táblázat.

C) Mindhárom oldal ferde.
Ezek előállítását a 2. táblázat segíti.

A 7. ábra egy-egy ilyen esetet szemléltet.



8. ábra

Egyenlő oldalú rácssokszögek

Magától értetődő az a kérdésfelvetés, hogy létrehozhatunk-e szöges-lyukas táblán egyenlő oldalú, ill. szabályos sokszögeket. A rácsgeometria pontos választ ad ezekre a kérdésekre.

Az alábbiakban bizonyítás nélkül[4] összefoglaljuk a legfontosabb eredményeket, amelyek ismerete sok felesleges próbálkozástól: gondolati és gyakorlati tevékenységtől szabadít meg bennünket.

a) *Az egyenlő oldalú rácssokszög oldalszáma szükségképpen páros.* Ennek általánosítása is igaz: az egyenlő oldalú zárt töröttvonal oldalszáma páros.

b) Nincs páratlan oldalú szabályos rácssokszög (az a) következménye).
Másképpen megfogalmazva: Egy rácspontból kiindulva, és mindig ugyanakkora távolságú rácspontba lépve, csak páros számú lépés után juthatunk vissza a kiindulási pontba.

c) Rácsnégyzeten kívül nincs más szabályos rácssokszög.

A 8. ábra egy egyenlő oldalú, konvex hatszöget szemléltet.

Irodalom

[1] Fitos László: A pitagoraszi számhármasok általánosításai, Iskolakultúra, IV. évfolyam, 5. szám

[2] Gádor Endréné: Élő matematika (szerkesztő) Tankönyvkiadó, Budapest, 1968

[3] Reiman István: A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest, 1986

[4] Török Tamás: Leszámlálási algoritmusok szöges-lyukas táblán, Tanító, megjelenés alatt

[4] A tételek bizonyítása megtalálható [3]-ban.

A matematikatanítás fejlődése

(A „The American Mathematical Monthly" 1994. évi 5. száma alapján)

1960-as évek

Egy paraszt egy zsák krumplit 10 dollárért ad el. A költsége az eladási ár 4/5 része. Mennyi a haszna?

1970-es évek

Egy farmer egy zsák burgonyát 10 dollárért ad el. A költsége az eladási ár 4/5 része, azaz 8 dollár. Mennyi a haszna?

1970-es évek („új matek")

Egy farmer egy *B* burgonyahalmazt elcserél egy *P* pénzhalmazért. A *P* halmaz számossága 10 és *P* minden eleme 1 dollár. Rajzolj 10 nagy pontot, ezek szemléltetik *P* elemeit. A termelési költség *K* halmazát a *P*-nél 2-vel kevesebb pont alkotja. Jelöld meg *K*-t, mint *P* egy részhalmazát és válaszolj a következő kérdésre:
Mennyi a számossága a haszont jelképező halmaznak?

1980-as évek

Egy farmer egy zsák burgonyát 10 dollárért ad el. A termelési költsége 8 dollár és a haszna 2 dollár. Húzd alá a „burgonya" szót és vitasd meg az osztálytársaiddal!

1990-es évek

Egy farmer egy zsák burgonyát 10 dollárért ad el. A termelési költsége a bevétel 0,8 része. Zsebszámológépeden rajzold meg a bevétel grafikonját a költség függvényében. A haszon kiszámításához futtasd a "BURGONYA" programot! Vitasd meg az erdményt a csoporttársaiddal! Írj egy rövid fogalmazást, amely ezt a problémát a valódi közgazdasági viszonyok tükrében elemzi!

(A feladatok az amerikai matematikaoktatás fejlődését karikírozzák, de talán nekünk is érdemes elolvasni.)

Versenyfelhívás a 11-14 éves korú tanulók részére az 1994-95. tanévre

A Matematika Tanítása folyóirat ebben a tanévben is feladatmegoldó pontversenyt hirdet matematikából a 11-14 éves korú tanulók részére.

A versenyre való jelentkezés módja: az első kitűzött feladatsor megoldásával egyidejűleg a versenyző írja meg a nevét, osztályát, az iskolája címét. A versenyre való nevezési díj 500 Ft, ezt 1994. november 30-ig kell megküldeni (rózsaszín) postautalványon a kiadó címére: MOZAIK Oktatási Stúdió, 6723 Szeged, Pf. 301.

A folyóirat 1994. évi 4. és 5. továbbá az 1995. évi 1. és 2. számában kitűzött feladatok megoldását az ott megjelölt dátumig kell beküldeni. Az összesített eredmény alapján korosztályonként a 10 legjobb versenyző meghívást kap az 1995 május végén Szegeden megrendezésre kerülő döntőre.

A kitűzött feladatok megoldását *részletes indoklással* kell leírni. Minden egyes feladat megoldását *külön-külön lapra* kérjük leírni és minden lapra fel kell írni a beküldő tanuló nevét, osztályát, iskoláját. A versenyzőktől elvárjuk, hogy önállóan dolgozzanak.

vét, osztályát, iskoláját. A versenyzőktől elvárjuk, hogy önállóan dolgozzanak.

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5.-6. osztályosoknak)

94.17. Sok szempontból érdekes a következő bűvös négyzet, amely megtalálható Albrecht Dürer „Melankólia" című metszetén:

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Könnyű megjegyezni róla, hogy Dürer ezt a művét 1514-ben készítette.

A négyzet bármely sorában, bármely oszlopában és a két átlóban is a számok összege ugyanannyi, méghozzá 34. Ez a bűvös négyzet állandója.

Keressünk az eddig említetteken túl minél több olyan további számnégyest a bűvös négyzetből, amelyekre szintén igaz, hogy a négy szám összege 34!

94.18. Adott egy szabályos ötszög. Ennek középpontját összekötjük az ötszög csúcsaival, így öt egybevágó, egyenlőszárú háromszögre bontjuk. Hányféleképpen lehet ezt az öt háromszöget 5 különböző színnel kiszínezni, ha az elforgatással egymásba vihető kiszínezéseket nem tekintjük különbözőknek?

94.19. Keressünk 4 olyan pozitív egész számot (nem feltétlenül különbözőt), amelyeknek összege egyenlő a szorzatukkal. (az összes megoldást adjuk meg!)

94.20. Hány 0-ra végződik a $9^{99}+1$ szám tizes számrendszerben felírt alakja?

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7.-8. osztályosoknak)

94.21. Adott egy 6×6-os sakktábla. Lefedhető-e ez a tábla egyrétűen és hézagtalanul 9 darab 1×4-es téglalappal?

94.22. Az első 100 pozitív egész szám közül válasszunk ki minél több (különböző) számot úgy, hogy bármely két kiválasztott szám összege osztható legyen 26-tal!

94.23. Legfeljebb hány részre osztja a síkot 5 kör? És 10 kör?

94.24. Adott az ABC háromszög. Szerkesszük meg az AB oldalon az X pontot, és az AC oldalon az Y pontot úgy, hogy $AX = XY = YC$ teljesüljön!

A megoldásokat a következő címre kérjük megküldeni:

MOZAIK Oktatási Stúdió
6723 Szeged. Pf.301.

A borítékra kérjük, írják rá: Matematika feladatmegoldó pontverseny.

A beküldési határidő: 1994. november 30.

Az 1993/94. évi matematika feladatmegoldó pontverseny IV. fordulójában kitűzött feladatok megoldásai

A feladatok szövege az 1994/2. szám 23-24. oldalán található.

94.9. Az első ötlet az lehet, hogy a keresett szám osztható 2-vel és 9-cel, tehát 18-cal, ezért keressük a megfelelő számokat a 18 többszörösei között. Az első 10 pozitív egész számmal szorozva 18-at rendre olyan számokat kapunk, amelyeknek 6, 9, 8, 12, 12, 12, 12, 15, 10, 18 pozitív osztója van. Így a *b)* kérdésre már választ is adhatunk; $8 \cdot 18 = 144$ osztható 2-vel és 9-cel és 15 osztója van.

Az eddigi keresés tapasztalatait hasznosítva érdemes észrevenni, hogy a szám prímhatványok szorzataként történő előállításából könnyű kiszámítani az osztók számát: minden kitevőt 1-gyel kell növelni és a kapott számokat összeszorozni. Például $18 = 2 \cdot 3^2$ osztóinak száma: $(1 + 1)(2 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$. Hiszen az osztók között csak olyan számok szerepelhetnek, amelyek prímtényezős előállításában csak 2 és 3 hatványai szerepelhetnek, 2 a 0 vagy 1 kitevővel, 3 pedig a 0, 1 vagy 2 kitevővel. Így adódik a $2 \cdot 3 = 6$ lehetőség.

Ennek felhasználásával már könnyű válaszolni az *a)* kérdésre is. Mivel $14 = 2 \cdot 7$, ezért a keresett számban az egyes prímek kitevője 1 és 6 lehet csak. A szám $9 = 3^2$-nel osztható, tehát csak a 3 kitevője lehet 6, így a 2-é az 1, tehát a keresett szám $2 \cdot 3^6 = 1458$. Más ilyen szám nincs is.

A *b)* esetben (15 osztó), mivel $15 = 3 \cdot 5$ a keresett számban a prímek kitevője 2 és 4. Eddig már megtaláltuk a $144 = 2^4 \cdot 3^2$-t, még a $2^2 \cdot 3^4 = 324$ is megfelelő.

A *c)* esetben az a válasz, hogy ilyen szám nincs. Mivel 13 prímszám, a keresett számban csak egyetlen prímszám szerepelhetne 12 kitevővel (például 2^{12} vagy 3^{12}), de akkor nem lehet, hogy a szám 2-vel és 9-cel is osztható.

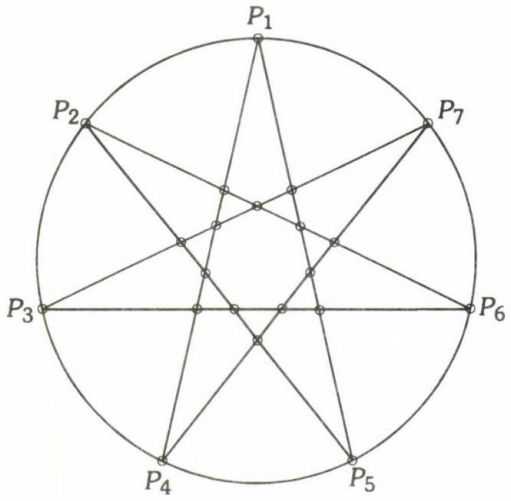
94.10. Legyen Anti röviden A és Béla B. Néhány játék lejátszása után, vagy alapos végiggondolással rájöhetünk, hogy az az A célja, hogy amikor B utoljára vesz, 3 bábu legyen a táblán, hiszen akkor bármennyit is vesz el (1-et vagy 2-t), még éppen annyi marad, amennyit A el tud venni. Hasonlóan ha B utolsó előtti lépésekor 6 bábu van a táblán, A eléri, hogy B utolsó lépésére már csak 3 bábu maradjon.

Hasonlóan adódik, hogy A-nak az az előnyös, ha 9 és 12 bábu van a táblán, amikor B következik lépésre. Az A első lépése tehát az, hogy 1 bábut levesz. Ezután minden lépés során B bármelyik lehetőséget választja is, A ezt követően mindig úgy egészíti ki saját lépéseivel, hogy az együttesen levett bábuk száma 3 legyen. Így B utolsó lépése előtt 3 bábu van a táblán, B akár egyet, akár 2-t vesz le A-nak marad 2 vagy 1 bábu, amelye(ke)t utolsóként ő le tud venni, tehát A győz.

Ha A először (véletlenül) 2-t vesz le, akkor 11 bábu marad. Ha ezután B is 2-t vesz le, akkor csak 9, így B tudja elérni, hogy győzzön. Az A minden lépését kiegészíti úgy, hogy együtt 3 bábut vegyenek le, akkor az utolsó lépést B teszi meg.

94.11. Rajzoljunk egy szabályos 7-szöget és próbáljuk meg összekötni a csúcsokat 7 szakasszal úgy, hogy minél több metszéspont keletkezzen a sokszög belsejében. Néhány kísérlet után hamar találhatunk olyan összekötési módot, amikor 14 metszéspontot kapunk. Felmerül a kérdés, kaphatunk-e ennél többet.

7 egyenes – ha mindegyik egy-egy különböző pontban metszi a másik 6-ot – összesen $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ metszéspontot ad. Ebből 7 a csúcsokban lesz, tehát a sokszög belsejében legfeljebb $21 - 7 = 14$ metszéspontot kaphatunk.

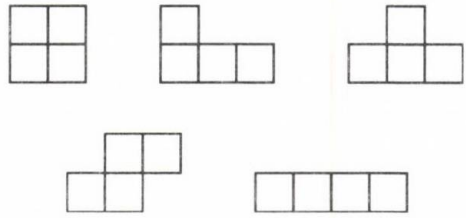


Hasonló módon okoskodhatunk 17-szög esetén is (itt kézzel rajzolni már nehezebb). Itt legfeljebb $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$ metszéspont várható, de ebből 17 a kör kerületére esik, így a kör belsejében $136 - 17 = 119$ metszéspontot kaphatunk.

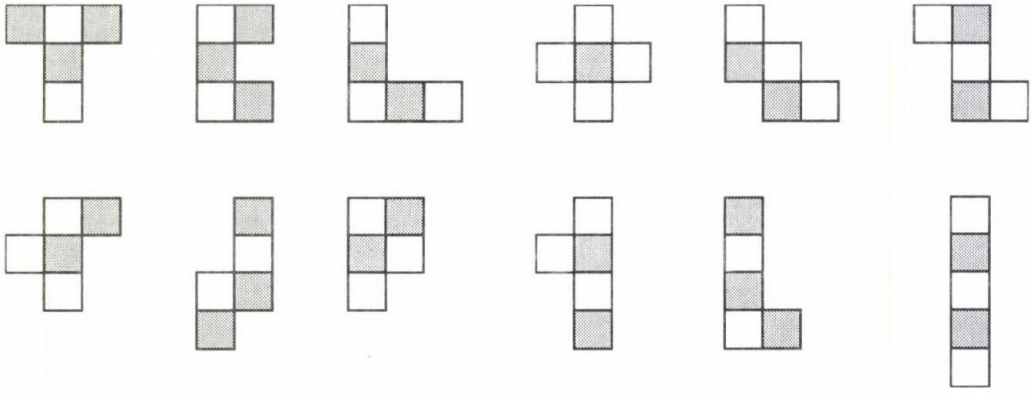
Ha például a kör mentén egyik irányban haladva a pontokat sorra P_1-től P_{17}-ig számozzuk, akkor a következő összekötési sorrend megfelelő lesz:

$P_1\, P_9\, P_{17}\, P_8\, P_{16}\, P_7\, P_{15}\, P_6\, P_{14}$
$P_5 P_{13}\, P_4\, P_{12}\, P_3\, P_{11}\, P_2\, P_{10}\, P_1$.

94.12. *a)* Az öt különböző tetramínó a következő:



b) A pentamínók száma már 12, ezek a következők:



c) A hexamínók száma már jóval több, összesen 35. Ezek felrajzolásához segítséget jelent a következő észrevétel: 24 olyan hexamínó van, amelyet ha „sakktáblaszerűen" kiszínezünk, mint az előző pentamínókat, akkor azokon 3 világos és 3 sötét mező lesz. Ezek a „páratlan" hexamínók. A többi 11-et, a „páros"-akat csak úgy lehet kiszínezni, hogy az egyik színből 4, a másikból 2 mezőt tartalmaznak.

94.13. Elég reménytelen feladatnak tűnik az a módszer, hogy bontsuk fel az $A = 11111111$ számot prímtényezők szorzatára és ezután nézzük meg, melyik szerepel B-ben is. Más utat célszerű választani.

Osszuk el B-t A-val és határozzuk meg a *maradékot*:

$$B = A \cdot C + 1111,$$

ahol $C = 10000000010...010000$, a szám 14 darab 1 számjegyből áll, két szomszédos 1 kö-

zött mindig 8 darab 0 van és a végén 4 darab 0. A maradék, 1111 tehát így is írható:

$$B - A \cdot C = 1111.$$

Könnyű ellenőrízni, hogy 1111 osztója A-nak és B-nek is, azaz A és B közös osztója. De akkor ez a legnagyobb közös osztó is, hiszen ha egy n szám közös osztója A-nak is és B-nek is, akkor osztója $B - A \cdot C = 1111$-nek is.

A keresett legnagyobb közös osztó tehát 1111.

94.14. Legyen Andris Röviden A, Balázs pedig B. Ahhoz, hogy A nyerjen, arra van szükség, hogy B utolsó lépése előtt 7 bábu legyen az asztalon. Ha ekkor B 3-at vesz le, A 4-et, ha B 4-et, akkor A 3-at és így A győz. Ehhez a helyzethez az kell, hogy az utolsó előtti B lépést megelőzően 14 bábu legyen az asztalon. És így tovább, végül világos, hogy ha B első lépésekor 35 bábu van az asztalon, akkor A győzni tud. Ehhez A-nak az első lépésben 4 bábut kell elvennie.

Az A nyerő stratégiáját röviden így foglalhatjuk össze: első lépésére 4-et vesz le és minden további lépésben annyit, ami a B által az előző lépésben levetteket 7-re egészíti ki. Így A a 6-odik lépésben biztosan győz.

Teljesen hasonló módon adódik, hogy ha az A első lépésben 3-at vesz le és B 4-et, akkor a táblán 32 bábu marad. Ezután A bármely lépésére B mindig azzal válaszol, hogy 7-re egészíti ki az általa levett bábok számát. Így újabb 4 „forduló" után 4 bábu marad a táblán, B következik, ezeket leveszi és így győz.

94.15. Először talán érdemes „kísérletezni". Elég hosszú ideig kell számolni, míg kialakul az a meggyőződésünk, hogy az összeg utolsó számjegye 20-tól kezdve ismétlődik periodikusan. Csak az utolsó számjegyeket leírva a következő érdekes sorozatot kapjuk:

1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8,
1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, ...

Bizonyítsuk is be a „sejtést". Használjuk fel az ismert összefüggést:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ha n helyett $n + 20$-ig adjuk össze a számokat, akkor az eredmény:

$$\frac{(n+20)(n+21)}{2}.$$

Nézzük a két összeg különbségét:

$$\frac{(n+20)(n+21)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= 20n + 210 = 10(2n + 21).$$

A különbség mindig osztható 10-zel, tehát a két összeg utolsó számjegye mindig azonos.

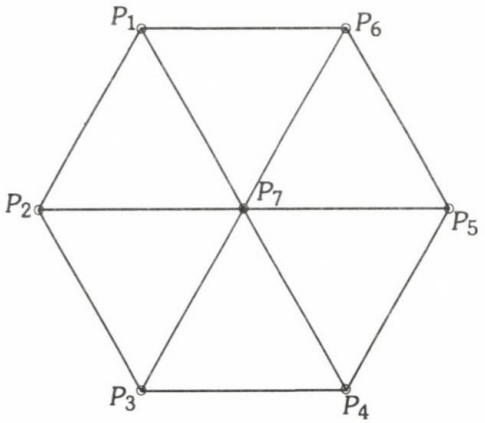
Ezek után már nem nehéz a két utolsó számjegyről megsejteni, hogy 200 a periódusuk:

$$\frac{(n+200)(n+201)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 100(2n + 201).$$

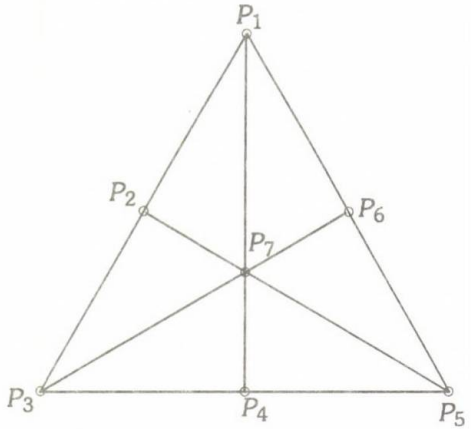
A különbség mindig osztható 100-zal, tehát a két összeg utolsó 2 számjegye mindig azonos.

94.16. A 7 pont esetére a következő két megoldást mutatjuk be:

a) egy szabályos hatszög 6 csúcsa és a középpontja:



b) egy szabályos háromszög három csúcsa, a három oldal felező pont és a háromszög középpontja.



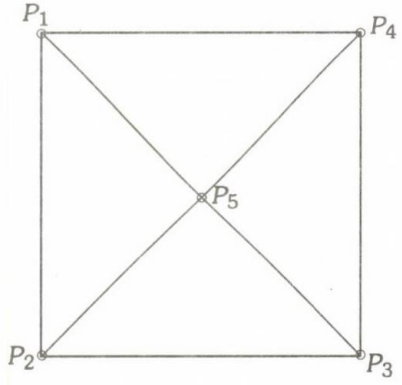
Mindkét esetben fontos észrevenni, hogy a 0 °-ot is a 30 °, „többszörösének" tekintjük. Az első esetben például $P_3P_7P_6\sphericalangle = 0$ °; a második esetben is ugyanez teljesül.

Könnyű ellenőrízni, hogy a szóba jöhető szögek: 0 °, 30 °, 60 °, 90 ° és 120 °, mindegyik a 30 ° egész számú többszöröse.

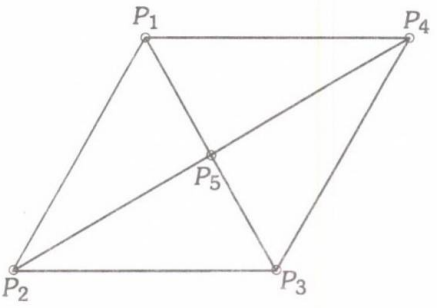
Természetesen az is megoldás, amikor a 7 pont egy egyenesen van.

Az 5 pont esetére három megoldást mutatunk be:

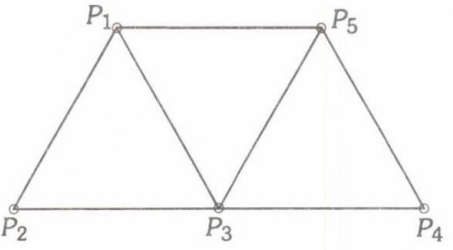
a) Egy négyzet 4 csúcsa és a középpontja:



b) Két szabályos háromszögből összeállított rombusz és a középpontja:



c) Három szabályos háromszögből összeállított, egy szabályos hatszög „felét" alkotó ötszög csúcsai:



Itt is jó az az eset is, amikor az 5 pont egy egyenesen van.

Örömmel vesszük, ha a megoldók, olvasók további megoldásokat is adnak.

Az 1993/94. tanévi feladatmegoldóverseny értékelése

Feladatmegoldó versenyünk áprilisban ért véget, melynek négy fordulóján 250 diák vett részt az ország egész területéről. A megoldások között számos eredeti, érdekes volt. Nagyon sok tehetséges, a matematika iránt igazán érdeklődő diákot ismerhettünk meg a fordulók során. A verseny két korcsoportban zajlott, ennek megfelelően a májusi döntőbe korcsoportonként azt a 15 tanulót hívtuk meg, akik a legjobb eredményt érték el. Május 21-én a szegedi Juhász Gyula

Tanárképző Főiskolán 13-13 versenyző jelent meg.

A döntő során 5 feladatot kellett megoldani a rendelkezésre álló 90 perc alatt. A zsűri az első három helyezett versenyzőnek adott át könyvjutalmat.

Külön szeretnénk megköszönni mindazon kollégák munkáját, akik a tanulókat segítették, lelkesítették a versenyen való részvételben.

A verseny eredménye:

I. korcsoport

1. *Varju Péter* 47 pont Béke Utcai Ált. Isk. Szeged felkészítő tanára: Melega Jánosné
2. *Micskei Zoltán* 46 pont Jedlik Á. Gimn. Budapest felkészítő tanár: Dr. Sebestyén Zoltánné
3. *Tóth Viktória* 39 pont Batthyány L. Gimn. Nagykanizsa felkészítő tanár: Marton Tiborné
4. *Kocsis Zoltán* 37 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
5. *Késmárki Péter* 36 pont Jedlik Á. Gimn. Budapest felkészítő tanár: Dr. Sebestyén Zoltánné
6. *Marosi András* 31 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
7. *Törőcsik Andrea* 28 pont József A. Gimn. Székesfehérvár felkészítő tanár: Wolkensdorfer János
8. *André Róbert* 27 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
9. *Hegyes Balázs* 23 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
10. *Oravecz Viktor* 22 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
11. *Tóth Edit* 21 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Geráné Góg Ildikó
12. *Magony Emőke* 19 pont József A. Gimn. Makó felkészítő tanár: Dályai Anna
13. *Fekete János* 8 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné

II. korcsoport

1. *Mátó István* 50 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
2. *Balogh Zoltán* 49 pont Krúdy Gy. Gimn. Nyíregyháza felkészzítő tanár: Tóth István és dr. Kiss Sándor
3. *Végh Zoltán* 48 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
4. *Sarlós Ferenc* 42 pont III. Béla Gimn. Baja felkészítő tanár: Királyné Nagy Éva
5. *Balatoni Dénes* 40 pont Berzsenyi D. Gimn. Budapest felkészítő tanár: Dr. Urbán János
6. *Lenk Sándor* 38 pont Ált.Iskola Zalalövő felkészítő tanár: Kissné Mánfai Zita
7. *Kutalik Péter* 33 pont Berzsenyi D. Gimn. Budapest felkészzítő tanár: Dr. Urbán János
8. *Törőcsik Ágnes* 31 pont Teleki B. Gimn. Székesfehérvár felkészítő tanár: Németh Krisztina és Lengyel Ferenc
9. *Siket Péter* 30 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
10. *Varga Ivett* 25 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
11. *Brezán Edina* 23 pont Kálvin Téri Ált. Isk. Makó felkészítő tanár: Dr. Varga Istvánné
12. *Vajda Zoltán* 20 pont Berzsenyi D. Gimn. Budapest felkészítő tanár: Gálné Groma Virág
13. *Holcsek Péter* 3 pont Gárdonyi G. Ált. Isk. Devecser felkészítő tanár: Péter László

A feladatlap közlésével a tájékoztatás mellett segítséget is nyújtunk felmérések írásához, esetleg háziverseny megrendezéséhez.

Feladatmegoldó verseny országos döntője (5–6. osztály) Szeged, 1994.

1. Mekkora a D téglalap területe ha az A, B és C téglalapok területe az ábrán látható?

A $18\ \text{cm}^2$	B $27\ \text{cm}^2$
D	C $6\ \text{cm}^2$

2. Egy 3 cm élű kockát úgy vágtunk szét kisebb méretű, de cm-ben mérve egész élhosszúságú kockákra, hogy ezek között keletkeztek különböző térfogatúak is. Hány kockát kaptunk a darabolás után?

3. Egy kerékpárversenyen a versenyzők három különböző szakaszon mérik össze a gyorsaságukat. Egy versenyző az egyes szakaszokon elért győzelemért 5, a második helyért 3 és a harmadik helyért 1 pontot kap. (Holtverseny nem lehetséges.) Legalább hány pontot kell egy versenyzőnek szereznie ahhoz, hogy az összes többi versenyzőnél biztosan több pontja legyen?

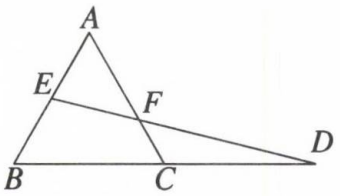
4. Egy videoszalagra 2 órás felvétel fér fel gyors, 4 órás normál és 6 órás extra hosszú felvétel esetén. Ha 32 percet vettünk fel gyors, 44 percet pedig hosszú felvétellel, milyen hosszú felvétel készíthető extra hosszú felvétel esetén?

5. Legfeljebb hány számot választhatunk ki az 1, 2, ..., 50 számsorozatból, ha a kiválasztott számok közül semelyik kettő összege sem osztható 7-tel?

Feladatmegoldó verseny országos döntője (7–8. osztály) Szeged, 1994.

1. Egy 6 cm sugarú körlapot három egyforma körcikkre vágunk szét. Mindegyik körcikkből kúpot készítünk. Mekkora ezeknek a kúpoknak a magassága?

2. A szabályos ABC háromszög oldala 2 cm. BC oldalt meghosszabbítjuk a saját hosszával a D pontig. Az AB oldal felezőpontját D-vel összekötve az ED szakasz az AC-t F-ben metszi. Mekkora a területe a $BEFC$ négyszögnek?



3. Egy iskolai zenekarnak 100 lány és 80 fiú tagja van. Az iskola énekkarában 80 lány és 100 fiú énekel. 60 lány mindkét csoportnak tagja, és tudjuk, hogy 230-an tagjai legalább az egyik együttesnek. A zenekar fiú tagjai közül hányan nem tagjai az énekkarnak?

4. Minden pozitív egész számhoz rendeljünk hozzá egy másik egész számot úgy, hogy az legyen egyenlő a szám és jegyeinek összegével. Például a 17-hez a 25-öt rendeltük hozzá, hiszen $17 + 1 + 7 = 25$. Vannak olyan pozitív „magányos" egészek, amelyeket semelyik egészhez sem rendeljük hozzá. A „magányos" számok sorozatában melyik lesz a 10.?

5. Határozzuk meg azt a hét egymás után következő legkisebb pozitív egész számot, amelyeknek összege négyzetszám és egyben köbszám is!

Feladatrovat - tanároknak

Feladatok

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **1052 Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10.** Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írjuk tollal, vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát, és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.) **Beküldési határidő:** 1994. november 30.

19. Legyen T olyan nem negatív valós számoknak a halmaza, amelyeknek a 4-es számrendszerbeli alakjában csak a 0 és az 1 számjegyek találhatók. Bizonyítsuk be, ha $x \in T$ és $y \in T$, de $x \neq y$, akkor

$$\frac{1}{2}(x+y) \notin T.$$

20. Adott 6 nem egysíkú pont. Tekintsük valamennyi, páronként közös végpont nélküli három szakasz felezőpontja adta háromszög súlypontját. Igazoljuk, hogy e súlypontok azonosak!

(Bencze Mihály, Brassó)

21. Határozzuk meg azokat a pozitív egész n számokat, amelyekre az

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

vegyes szakaszos tizedestört!

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

22. Legyen a_0 pozitív egész és

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

Az a_n sorozat tagjai között van-e egész szám? Adjunk meg olyan $n \mapsto f(n)$ függvényt, amely az a_n -től különbözik és aszimptotikusan egyenlő az a_n -nel, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{f(n)} = 1.$$

(Blázsik Zoltán, Szeged)

23. Igazoljuk, hogy bármely t területű, $2s = a + b + c$ kerületű háromszögben fennáll a

$$\frac{8st}{9} \geq \frac{abc}{\sqrt{3}}$$

reláció.

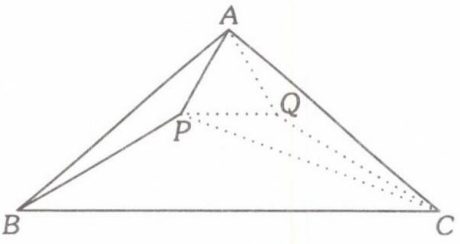
(Fekete Szilárd, Brassó)

24. A tér egy P pontjára n darab olyan egyenes illeszkedik, amelyek közül bármelyik kettő hajlásszöge legalább 30 °. Mutassuk meg, hogy $n < 59$!

(Bundeswettbewerb, 1985.)

Feladatmegoldások (1-6. feladatok)

1. Az ABC_Δ belsejében felvett P pontra $BAP\sphericalangle = 80°$, $PBA\sphericalangle = 10°$ és $PBC\sphericalangle = 30°$. Mekkora az $APC\sphericalangle$?



Megoldás: Az ABC_Δ egyenlő szárú, hiszen az adottakból $BAC\sphericalangle = BAP\sphericalangle + PAC\sphericalangle = 20° + 80° = 100°$ és $ABC\sphericalangle = ABP\sphericalangle + PBC\sphericalangle = 10° + 30° = 40°$ és így $ACB\sphericalangle = 40°$. Tükrözzük e háromszög szimmetriatengelyére a P pontot, a tükörképet jelölje Q. A szimmetria miatt $APB_\Delta \cong AQC_\Delta$ és így $AP = AQ$, $PB = QC$, továbbá $AQC\sphericalangle = APB\sphericalangle = 150°$. A szimmetria okán $PAQ\sphericalangle = 60°$, vagyis az APQ_Δ szabályos. Ennélfogva $CQ \perp AP$, hiszen az $AQC\sphericalangle = 150°$-os szög mellékszöge $30°$. Így CQ az AP felezőmerőlegese, az ACP_Δ tehát szimmetrikus, azaz $CAP\sphericalangle = APC\sphericalangle = 80°$.

(Bíró Bálint, Eger)

A megoldók száma: 12.

2. Igazoljuk: nincs négyzetszám, amely *tökéletes* szám is.

(Ambrus Gabriella, Budapest)

1. Megoldás: Legyen az n négyzetszám és tekintsük az n valamennyi páratlan osztóját. Ezek mindegyike osztója az n legnagyobb páratlan osztójának, amely maga is négyzet, mondjuk k^2. Az n szám páratlan osztóit párba állíthatjuk a k^2 társosztóiként, csupán a k számhoz rendeljük ily módon önmagát. Az n szám páratlan osztóinak száma és így összege is páratlan, ilyképpen az n összes osztójának az összege is páratlan. Az n szám osztóinak összege így nem egyenlő $2n$-nel, azaz n nem tökéletes.

(Nagy Róbert, Győr)

2. Megoldás: Ismert *Euler* tétele (lásd: *Szendrei János:* Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó; 166. oldal): Egy páros szám akkor és csak akkor tökéletes, ha $2^{p-1}(2^p - 1)$ alakú, ahol p is és $2^p - 1$ is prímszám. Világos, hogy páros négyzetszám nem lehet tökéletes, mivel a $2^p - 1$ lévén prím, nem négyzetszám. Ha van páratlan tökéletes szám, úgy az $p \cdot k^2$ alakú, ahol $p > 2$ prím és $k > 1$ (lásd: *Sárközy-Surányi:* Számelmélet feladatgyűjtemény, Kézirat, Tankönyvkiadó, 1985., 86. oldal 21. feladat). Eszerint páratlan tökéletes négyzetszám sincs, hiszen a $p \cdot k^2$ p tényezője prím, nem négyzetszám.

(Csete Lajos, Markotabödöge)

A megoldók száma: 12.

3. Legyen $\mathbb{N}^*$ a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának egy végtelen részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{N}^*$ elemeiből kiválasztható vagy egy olyan végtelen részhalmaz, amelyben bármely két elemnek van közös prímosztója, vagy egy olyan végtelen részhalmaz, amelynek bármely két eleme relatív prím!

Megoldás: Vegyünk ki egy tetszőleges, 1-nél nagyobb elemet. Ilyen létezik, hiszen halmazunk végtelen. Legyen ez az a_1. Vegyük sorra a_1 prímosztóit. Ha valamelyiknek van halmazunkban végtelen sok többszöröse, akkor végeztünk, hiszen találtunk végtelen sok számot, hogy bármely kettőnek létezik közös prímosztója. Ha nincs, akkor a halmazunkban csak véges sok szám van, amelyiknek a_1-gyel közös prímosztója van. Ezeket a számokat hagyjuk el a halmazból, még mindig végtelen a halmazunk. A maradékból válasszunk egy újabb ele-

met, mely a_1-nél nagyobb, legyen ez a_2. A kiválasztás miatt ezek az elemek relatív prímek. Ismételjük meg az előzőeket.

Így

– vagy találunk olyan prímet, amelynek végtelen sok többszöröse van a halmazban

– vagy kiválasztunk végtelen sok, egymáshoz relatív prímet. És ezt kellett bizonyítani.

(Szoldatics József, Kapuvár)

A megoldók száma: 8.

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely $ABCD$ tetraéderben

$$AB \cdot CD < AC \cdot BD + AD \cdot BC$$

(The Math. Gazette)

Megoldás: A DA, DB, DC félegyeneseken vegyük fel rendre az A_1, B_1 és C_1 pontokat úgy, hogy

$$DA_1 = DB \cdot DC, \quad DB_1 = DA \cdot DC$$

és

$$DC_1 = DB \cdot DA$$

legyen. Mivel

$$\frac{DA_1}{DB} = \frac{DB_1}{DA} = DC, \text{ és } ADB\sphericalangle = A_1DB_1\sphericalangle,$$

ezért a $DAB_\Delta \sim DA_1B_{1\Delta}$ és a hasonlóság aránya DC. Hasonlóan nyerjük, hogy $DAC_\Delta \sim DC_1A_{1\Delta}$ DB aránnyal és $DBC_\Delta \sim DC_1B_{1\Delta}$ DA aránnyal. E hasonlóságok miatt rendre

(1) $A_1B_1 = DC \cdot AB$, $A_1C_1 = DB \cdot AC$ és $B_1C_1 = DA \cdot BC$.

A D, A_1, B_1 és C_1 pontok nincsenek egy síkban, és az $A_1B_1C_1$ háromszöglapra a háromszög-egyenlőtlenséget felírva $A_1B_1 < A_1C_1 + B_1C_1$, azaz (1)-ből $AB \cdot CD < AC \cdot BD + AD \cdot BC$.

(Nagy Róbert, Győr)

Megjegyzés: Reiman István: A tetraéder köré írt gömbről c. cikkében (Középiskolai Matematikai Lapok 1992/10., 433-437. oldal) találjuk: Ha $ABCD$ tetraéder, akkor van olyan háromszög, amelynek oldalai $AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$. Ebből azonnal következik a feladatbeli állítás helyessége. A közölt megoldás is igazolja a fent idézetteket. (Az egységszakasz birtokában a $\frac{DB \cdot DC}{e}$ szerkeszthető.)

(Csete Lajos, Markotabödöge)

A megoldók száma: 7.

5. Mutassuk meg, hogy minden pozitív n egészre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2.$$

(Kvant)

Megoldás: A k-adik tagot $\sqrt{k}$-val bővítve, azonos átalakításokkal nyerjük:

$$(*) \qquad \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sqrt{k}\frac{1}{(k+1)k} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Mivel

$$\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}<2,$$

ezért (*)-ből

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

és így

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2.$$

(Mészáros József, Galánta)

A megoldók száma: 10.

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1&=2x_2^2-1\\x_2&=2x_3^2-1\\&\vdots\\x_n&=2x_1^2-1\end{aligned}$$

(Bencze Mihály, Brassó)

Megoldás: Először azt mutatjuk meg, hogy $|x_i|\le 1$ kell legyen minden $1\le i\le n$-re. Állításunkat indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy $|x_i|\ge 1$. Az egyenletrendszer szimmetriája miatt feltehetjük, hoy ez az első ismeretlenre áll fenn. Ekkor $x_n = 2x_1^2 - 1 > 2 - 1 = 1$, és a többi változóra ugyanígy kapjuk, sőt azt is kaptuk, hogy minden ismeretlen 1-nél nagyobb. Szorozzunk meg minden egyenletet 2-vel és adjunk hozzá 1-et,

$$\begin{aligned}2x_1+1&=4x_2^2-1\\2x_2+1&=4x_3^2-1\\&\vdots\\2x_n+1&=4x_1^2-1\end{aligned}$$

Szorozzuk össze az egyenleteket, és egyszerűsítsünk a pozitív $2x_i + 1$ kifejezésekkel

$$\prod_{i=1}^{n}(2x_i+1)=\prod_{i=1}^{n}(4x_i^2-1),$$

azaz

$$\prod_{i=1}^{n}(2x_i+1)=\prod_{i=1}^{n}(2x_i+1)(2x_i-1),$$

amiből

$$1=\prod_{i=1}^{n}(2x_i-1)$$

Becsüljük meg a szorzatot, felhasználva, hogy minden ismeretlen 1-nél nagyobb:

$$1=\prod_{i=1}^{n}(2x_i-1)>\prod_{i=1}^{n}(2\cdot 1-1)=1$$

ami ellentmondás. Tehát az állítás igaz. Mivel minden ismeretlen 1-nél nem nagyobb abszolútértékű, ezért legyen α olyan szög, melyre $x_n = \cos\alpha$. Így kapjuk, hogy

$$x_{n-1} = 2x_n^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$
$$x_{n-2} = 2x_{n-1}^2 - 1 = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \cos 2^2\alpha$$
$$\vdots$$

és felhasználva az utolsó egyenletet is, majd megoldva:

$$\cos\alpha = x_n = 2x_1^2 - 1 = 2\cos^2 2^{n-1}\alpha - 1 = \cos 2^n\alpha$$
$$\cos\alpha = \cos 2^n\alpha,$$

amiből

$$\alpha = 2^n\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z},$$

vagy

$$\alpha = -2^n\alpha + 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$$

azaz

$$\alpha = \frac{2k\pi}{2^n - 1} \quad \text{vagy} \quad \alpha = \frac{2m\pi}{2^n + 1} \quad \text{ahol } k, m \in \mathbb{Z}.$$

(Szoldatics József, Kapuvár)

A megoldók száma: 5.

A megoldók névsora: András Szilárd, Csíkszereda, (1-6.); Berta László, Szécsény, (1.); Bencze Mihály, Brassó, (1-6.); Bíró Bálint, Eger, (1., 2., 5.); Blázsik Zoltán Szeged, (1-6.); Cziráky Erika, Vác, (1., 2.); Csete Lajos, Markotabödöge, (1. 3 megoldás, 2. 2 megoldás, 3., 4., 5. 3 megoldás); Fekete Szilárd, Brassó, (2., 4., 5.); Kocsis Orsolya, Szolnok, (1-3.); Kozma Ildikó, Baja, (1.); Mészáros József, Galánta, (1., 5.); Nyírő László, Mezőkövesd, (1., 2.); Nagy Róbert, Győr, (1., 2. 2 megoldás, 3-6.); Szoldatics József, Kapuvár, (1. 3 megoldás, 2. 2 megoldás, 3., 5., 6.); Tóth István, Gyula, (4.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely, (2., 3., 5.).

Versenyekről

dr. Urbán János

A XXIII. Kalmár László Matematika Verseny országos döntőjének feladatai és eredménye

1994 június 21-én és 22-én Vácott rendezte meg a TIT Pest megyei Szervezete a Kis Matematikus Baráti Körök XXIII. Kalmár László Matematika Versenyének országos döntőjét. A verseny két napján a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

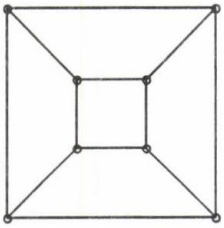
Ötödik osztály (I. nap)

1. Andris azt mondta Bélának: az én pénzem $\frac{3}{5}$-éhez még 70 forintot kell adni, és akkor annyi forintot kapunk, mint ahány van neked. Béla így válaszolt: neked csak 30 forinttal van több pénzed, mint nekem. Mennyi pénzük van külön-külön?

2. Keress 7 olyan egymást követő pozitív egész számot, amelyek két csoportba oszthatók úgy, hogy az egyik csoportba tartozó számok összege ugyanannyi, mint a másik csoportba tartozóké! Van-e 6 ilyen tulajdonságú, egymást követő egész szám?

3. Egy 3 egység élhosszúságú kockán megjelöljük mindegyik él mindegyik harmadolópontját. Ezután kiválasztjuk a kocka egyik csúcsát és a belőle kiinduló 3 élnek a csúcshoz közelebbi harmadolópontjain át egy sikot fektetünk, ezzel „levágjuk" a kocka egy „sarkát". Ezt a vágást sorra, mindegyik kockacsúcsnál elvégezzük. Hány csúcsa, hány lapja és hány éle lesz a megmaradt testnek?

4. Az ábrán egy „térképet" látsz. Legkevesebb hány színt kell felhasználni a csúcsok kiszínezéséhez, ha azt akarjuk, hogy az egy éllel összekötött csúcsok különböző színűek legyenek? És az élek kiszínezéséhez, ha azt akarjuk, hogy az egy csúcsból induló élek különböző színűek legyenek?



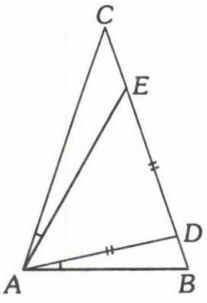
Hatodik osztály (1. nap)

1. Figyeld meg a következő összeadásokat:

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$
$$1353 = 13 + 14 + 15 + \ldots + 52 + 53,$$
$$133533 = 133 + 134 + \ldots + 532 + 533.$$

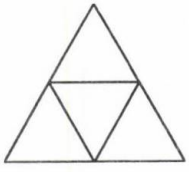
Mennyit kapunk, ha 1333-től 5333-ig összeadjuk az egész számokat? Általánosíts!

2. Adott az ABC egyenlőszárú háromszög ($AC = BC$), és ennek BC szárán a D és E pontok úgy, hogy $DA = DE$ és $DAB\sphericalangle = CAE\sphericalangle$ teljesül. Mekkora az $EAB\sphericalangle$?



3. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 20 között 2 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

4. Egy szabályos háromszöget könnyen fel tudunk bontani 4 szabályos háromszögre így! A megjelölt pontok, amiket összekötöttünk, az oldalfelező pontok. Felbontható-e egy szabályos háromszög 6 (nem feltétlenül egybevágó (egyforma)) szabályos háromszögre? És 8 szabályos háromszögre?



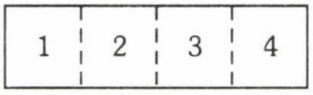
Hetedik osztály (1. nap)

1. Lehet-e négy egymást követő pozitiv egész szám összege egy egész szám négyzete? Állításodat indokold!

2. Egy kocka éle 1, lapátlója a, testátlója b hosszúságú. Hány különböző olyan háromszög van, amelynek oldalainak hossza az 1, a és b számok közül kerülnek ki? Ezek közül hány egyenlőszárú és hány egyenlő oldalú?

3. Egy szimmetrikus (egyenlőszárú) trapézról tudjuk, hogy két átlója merőleges egymásra. A trapéz középvonalának (a két szár felezőpontját összekötő szakasznak) a hossza 2 egység. Mekkora a trapéz területe?

4. Egy szalag négy egybevágó négyzetből áll, ezeket így megjelöltük:



A szalagot a szaggatott vonalak mentén összehajtjuk egy négyzetté, és letesszük az asztalra. Hányféle különböző sorrendben következhetnek ekkor az 1, 2, 3, 4 számok?

5. Mely számok elégitik ki egyszerre a következő két egyenlőtlenséget:

$$|x| \leq x \quad \text{és} \quad 2x - 1 > 3\,?$$

Nyolcadik osztály (1. nap)

1. Egy paralelogramma két szomszédos oldala 2 és 4 egység, hegyesszöge 60 °. Mekkorák a paralelogramma átlói?

2. Egy téglalap oldalai 5 és 9 egység. A téglalapot felbontottuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra. Igazoljuk, hogy ezek között van két egyenlő területű téglalap!

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$||x-1|-1| = x-2.$$

4. Mutassuk meg, hogy egy olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek alapon fekvő szögei 30 °-osak, felbontható 5 (nem feltétlenül egybevágó) ugyanilyen egyenlőszárú háromszögre!

5. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}.$$

Ötödik osztály (2. nap)

1. Oldjuk meg a következő rejtvényt:

$$M + A = T + E + K$$
$$M^2 = A^2 + T^2 + E^2 + K^2,$$

Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

2. Egy iskolai asztalitenisz bajnokságra 8-an jelentkeztek. A verseny lebonyolítására 5 nap állt rendelkezésre, mindenki mindenkivel játszott. A 3. és a 4. nap után megkérdezték a versenyzőket, ki hány mérkózést játszott le. A válaszok a következők voltak:

7, 7, 5, 5, 4, 4, 3, 1, illetve 7, 7, 5, 5, 4, 4, 3, 3.

Lehetséges ez? Válaszodat indokold meg!

3. Az óra és a percmutató déli 12 órakor fedik egymást. Legközelebb hány órakor fogják ismét fedni egymást?

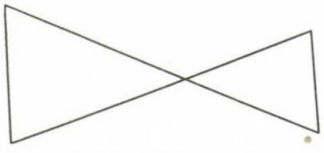
4. Keress olyan pozitiv egész számot, amely osztható 3-mal is és 4-gyel is és 6 különböző pozitiv osztója van! Van-e olyan 3-mal is és 4-gyel is osztható pozitív egész szám, aminek 7 különböző osztója van?

Hatodik osztály (2. nap)

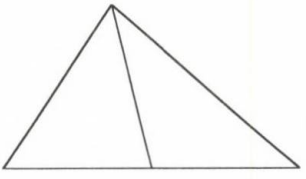
1. A következő szorzat eredményét prímszámok hatványának szorzata alakjában írjuk fel. Mennyi lesz ebben a 2 kitevője?

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60$$

2. Négy szakasszal legfeljebb 2 egymásba nem nyúló háromszöget tudunk rajzolni igy:



vagy igy:



Legfeljebb hány, egymásba nem nyúló háromszöget tudunk rajzolni 5 szakasszal? És 6-tal?

3. Adott 12 darab 1 egység hosszú gyufaszál. Készíts ezek felhasználásával olyan sokszöget, amelynek területe 4 (terület) egység és kerülete 12 egység!

4. Az l, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel (gondolatban) elkészítjük az összes ötjegyű, különböző számjegyekből álló, tízes számrendszerbeli számot. Van-e ezek között két olyan szám, hogy egyik osztója a másiknak?

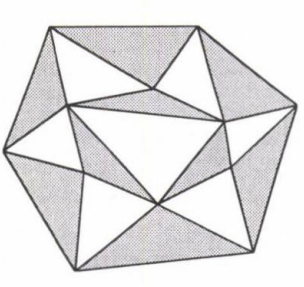
Hetedik osztály (2. nap)

1. Egy derékszögű trapéz egyik alapja és hosszabbik szára 4 egység. A 4 egység hosszú alapon fekvő derékszögű csúcsból induló átló 30 °-os szöget zár be az ugyanebből a csúcsból induló szárral. Mekkora a trapéz középvonala?

2. Az ábrán látható hatszöget háromszögekre bontottuk úgy, hogy a következő két tulajdonság igaz:

a) két háromszögnek vagy van közös oldala – ekkor az egyik Δ fehér, a másik vonalazott – vagy csak közös csúcsa van, vagy nlncs közös pontja,

b) a hatszög mindegyik oldala egy vonalazott háromszög egyik oldala. Fel lehet-e ugyanigy háromszögekre bontani egy konvex ötszöget?



3. Milyen k egész számra van olyan x és y egész szám, hogy a következő két egyenlőség egyszerre teljesül:

$$kx + y = 2,$$
$$x - y = 3\,?$$

4. Tetszőlegesen megadunk 10 darab pozitív egész számot, amelyek közül egyik sem osztható 10-zel. Igaz-e, hogy ekkor van köztük néhány olyan, (esetleg az összes), amelyeknek összege osztható 10-zel?

Nyolcadik osztály (2. nap)

1. Egy derékszögű háromszög két befogója 3 és 4 egység. Mindkét befogóra, mint átmérőre kört rajzolunk. Számítsuk ki a két kör közös húrjának hosszát!

2. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 30 között 3 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

3. Van-e olyan x és y egész szám, amely eleget tesz a következő egyenlőségnek:

$$6x^2 - y^2 = 9\,?$$

4. Hol vannak a sikon azok az $(x; y)$ koordinátájú pontok, amelyek kielégítik a következő egyenlőséget:

$$|x + y| + |x - y| = 4.$$

A verseny végeredménye (az egyes osztályok első három helyezettje, iskolája, tanára, ill. szakkörvezető tanára):

Ötödik osztály

1. *Gyebnár Gábor*, Szeged, Alsóvárosi Általános Iskola, Dr. Imreh Balázsné,
2. *Szeti Balázs*, Székesfehérvár, Hétvezér Általános Iskola, Mayerné Balogh Mária,
3. *Boros Mátyás*, Budapest, Veres Péter Gimnázium, Kötél Tamás,

Hatodik osztály

1. *Paczári Krisztián*, Nyíregyháza, 17. sz. Általános Iskola, Juhász Józsefné,
2. *Antók Péter*, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Marcsek Gábor,
3. *Győri Nikolett*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Iskola, Kovács Csongorné,

Hetedik osztály

1. *Terpai Tamás*, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Iskola, Dobos Sándor,
2. *Végh Zoltán*, Makó, Kálvin téri Általános Iskola, dr. Varga Istvánné,
3. *Kutalik Péter*, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, dr. Urbán János,

Nyolcadik osztály

1. *Szeles Tamás*, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, Vincze István,
2. *Lippner Gábor*, Budapest, Eötvös József Gimnázium, Gyengéné Beé Andrea,
3. *Nyul Gábor*, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, Nagy Erzsébet, és
Zubcsek Péter, Budapest, Fazekas Mihély Fővárosi Gyakorló Iskola, Pósa Lajos.

A MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
tankönyvajánlata 1994/95-re

Kisiskolások magyar nyelv könyve 1-2. oszt.	176
Kisiskolások magyar nyelv könyve 3. oszt.	176
Kisiskolások magyar nyelv könyve 4. oszt.	176
Kisiskolások anyanyelvi gyakorlókönyve 1. oszt.	187
Kisiskolások anyanyelvi gyakorlókönyve 2. oszt.	187
Kisiskolások anyanyelvi gyakorlókönyve 3. oszt.	187
Kisiskolások anyanyelvi gyakorlókönyve 4. oszt.	187
Mentsük meg Szederkét! (munkafüzet) 3-4.oszt.	242
Meséről-mesére	176
Fogalmazás lépésről lépésre I. (2-4. oszt.)	198
Fogalmazás lépésről lépésre II. (4-6. oszt.)	220
Magyar irodalom 7. osztály (tankönyv)	175
Magyar irodalom munkafüzet 7. osztály	198
A magyar nyelv I.	385
Töprengő III. (tehetséggondozó mat. feladatok 3-4. oszt.)	198
Töprengő IV. (tehetséggondozó mat. feladatok 4-5. oszt.)	198
Matematika gyakorló munkafüzet 2. oszt.	198
Matematika gyakorló munkafüzet 3. oszt.	198
Matematika gyakorló munkafüzet 4. oszt.	198
Matematikai ismeretek 13-14 éveseknek (tankönyv)	275
MATEMATIKA. Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek	352
Matematika feladatsorozatok 7. oszt.	198
Matematika feladatsorozatok 8. oszt.	198
Matematikai fogalmak, tételek	352
Fizika 12 éveseknek (tankönyv)	178
Fizika munkafüzet 12 éveseknek	48
Fizika 13 éveseknek (tankönyv)	178
Fizika munkafüzet 13 éveseknek	48
Fizika 14 éveseknek (tankönyv)	198
Fizika munkafüzet 14 éveseknek	58
Hogyan oldjunk meg fizikai feladatokat?	252
Fizikai feladatok gyűjteménye (12-16 éveseknek)	278
Kis mester a földrajzhoz 6. oszt.	238
Természetföldrajz I. – A Föld belső erői	414
Tájékozódás a térképen – Topográfiai gyakorlatok	198
Komplex munkafüzet biológiából 6. oszt.	176
Komplex munkafüzet biológiából 7. oszt.	198
Komplex munkafüzet biológiából 8. oszt.	220
Biológiai fogalmak és összehasonlító táblázatok	396
Biológiai összefüggések, logikai vázlatok	396
Biológiai feladatok középiskolásoknak	298
Rendszerező kémia mintapéldákkal, feladatokkal	385
Német nyelvkönyv középfokú állami nyelvvizsgára készülőknek	363
Német beszédfordulatok A-Z-ig	480

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ – 6701 Szeged, Pf. 301.

imsofil

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1994. NOVEMBER ára: 88,- Ft II. évf. / 5. szám

TARTALOM

EGY EGYSZERŰ VARGA TAMÁS-FELADAT
Lukács Ottó
főiskolai tanár, Budapest

A III. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKA VERSENY UNGVÁRON
Elek Ernő
tanügyi főtanácsos, Ungvár

HÚRCSOKROK AZ EGYSÉGSUGARÚ KÖRBEN
Uhrin János
szaktanácsadó, Békéscsaba

A FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK TANÍTÁSÁRÓL
Kovács András
tanár, Debrecen

EGY SZABÁLYOS HÁROMSZÖGRE VONATKOZÓ TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA
Fitos László
főiskolai tanár, Esztergom

A ZRÍNYI ILONA ORSZÁGOS MATEMATIKA-VERSENY
Csordás Mihály

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONT-VERSENY II. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

FELADATROVAT TANÁROKNAK

HÍREK VERSENYEKRŐL

A szűkebb diaszpróra minden csücskében – gondolok itt a Magyarországot körülvevő területekre – élnek és működnek önfeláldozó tanárok, a matematika tanításának megszállottjai, mint például Szabó Magda (Szabadka), Oláh György (Szlovákia), Bencze Mihály (Románia), ... *(4. oldal)*

A követett útnak érdekes leágazásai vannak. Ráirányíthatjuk a figyelmet a szerkeszthető szabályos sokszögekre, az ezekhez tartozó számítások elvégzésére.

A sejtés alapján igen valószínűvé válik, hogy a húrok szorzatát kifejező szorzat trigonometrikus tényezőjének értéke $\frac{n}{2^{n-1}}$. *(8. oldal)*

Az ilyen típusú tehetséggondozás mellett szóló fontos érv, hogy eldugott, kis falvakban lakó gyerekek számára lehetőséget nyújt matematikai képességeik rendszeres fejlesztésére, amelyre talán egyéb alkalom nem is adódik. *(26. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 440 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

EGY EGYSZERŰ VARGA TAMÁS-FELADAT
Lukács Ottó
főiskolai tanár, Budapest

A III. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKA VERSENY UNGVÁRON
Elek Ernő
tanügyi főtanácsos, Ungvár

HÚRCSOKROK AZ EGYSÉGSUGARÚ KÖRBEN
Uhrin János
szaktanácsadó, Békéscsaba

A FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK TANÍTÁSÁRÓL
Kovács András
tanár, Debrecen

EGY SZABÁLYOS HÁROMSZÖGRE VONATKOZÓ TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA
Fitos László
főiskolai tanár, Esztergom

A ZRÍNYI ILONA ORSZÁGOS MATEMATIKA-VERSENY
Csordás Mihály

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY II. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

FELADATROVAT TANÁROKNAK

HÍREK VERSENYEKRŐL

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Lukács Ottó

Egy egyszerű VARGA TAMÁS-feladat

VARGA TAMÁS és munkatársai teremtették meg Magyarországon az „új matek"-ot. Szerencsés voltam, az egyetemen nála is tanultam.

Egy zárthelyi megírására 40 Celsius-fokos lázzal mentem V. T. órájára. Üres papírt adtam be, az eredmény nyilvánvalóan elégtelen volt. Nagyon bántott. Elmentem TAMÁShoz: hiába van csupa jeles zárthelyim, az elégtelen az átlagot úgy lehúzza, hogy jeles gyakorlati jegyem *soha* nem lehet.

„Soha?" – kérdezte – „Számítsd ki, hány jeles kell ahhoz, hogy az átlagodat jelesre kerekíthessem!"

I. megoldás: Ha n db jelesem van és 1 elégtelenem, az átlaguknak legalább 4,5-nek kell lennie:

$$\frac{5n+1}{n+1} \geq 4{,}5.$$

Az egyenlőtlenséget $n+1$ pozitív számmal végigszorozva, rendezve:

$$\underline{\underline{n \geq 7}}.$$

Legalább 7 jeles kell az egy szerencsétlen elégtelen ellensúlyozásához.

II. megoldás: Számítsuk ki az átlagokat addig, amíg el nem érjük a 4,5-et!

jelesek száma, n	0	1	2	...	6	7
átlag	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{6}{2}=3$	$\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$	...	$\frac{31}{6}=4\frac{3}{7}$	$\frac{36}{8}=4{,}5$

Persze, ez a megoldás csak szerencsés esetben alkalmazható (ha hamar elérjük a szükséges átlagot).

III. megoldás: Figyeljük meg az egymás utáni 2-2 átlag növekedését! ($n-1$ ötös esetén az átlag $\frac{5n-4}{n}$, n ötös esetén $\frac{5n+1}{n+1}$.)

n	0	1	2	3	4	...	n
átlagnövekedés		$3-1=2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	...	$\frac{5n+1}{n+1}-\frac{5n-4}{n}=\frac{4}{n(n+1)}$

Addig kell az átlagnövekedést összeadnunk, míg nulla ötös esetén az átlagot minimum 3,5-del fel nem tornásszuk legalább 4,5-re.

$$(1) \qquad 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{4}{n(n+1)} \geq 3{,}5.$$

Ezért az n tagú összeg:

$$4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \geq 3{,}5.$$

$$4\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geq 3{,}5.$$

$$\underline{\underline{n \geq 7}}.$$

IV. megoldás: Figyeljük most az átlagnövekedéseket az első átlaghoz, az 1-hez viszonyítva! (1)-ből leolvasható, hogy n ötös esetén ez az új átlagnövekedés:

$$2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{4}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{4}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{n(n+1)}=$$

$$=4\cdot\frac{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n(n+1)+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n(n+1)}.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a számlálóban álló összeg $n! \cdot n$.

$n = 1$ vagy 2 ötös esetén még nem érjük el a kívánt átlagot.

$n = 3$-ra a feltételezett képlet igaz: $3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 3! \cdot 3$.

Tegyük fel, hogy n-re igazoltuk a képlet érvényességét!

$$3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1) + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = n! \cdot n.$$

Igazoljuk, hogy ebből $(n+1)$ esetén is öröklődik a képlet érvénye!

$$3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2) + 1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2) + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n = (n+2)[3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1) + 1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1) + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)] + n! = (n+2)n! \cdot n + n! = n!(n^2 + 2n + 1) = n!(n+1)(n+1) = (n+1)!(n+1).$$

Így, $n = 3$-tól kezdve, minden nála nagyobb természetes számra fennáll a képletünk.

Ekkor az 1-hez viszonyított átlagnövekedés

$$4 \cdot \frac{n!n}{n!(n+1)} \geq 3{,}5,$$

$$\underline{\underline{n \geq 7}}.$$

A sztori befejezése. V. T.: „Írtál a félév során 3 jeles és 1 elégtelen zárthelyit. Számítsuk a négy megoldásod eredményét 2 jelesnek a KÖMAL feladatokból és az országos versenyfeladatokból tartott előadásodat 2 jelesnek, máris megvan a jeles gyakjegyed!"

Elek Ernő

A III. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny Ungváron

A fiatalok körében végzett tehetségkutatás rendszeresen minden országban folyik. Gazdasági megfontolásból – a volt szocialista országokban – sajnos egyre szűkül az oktatásra szánt összeg, ezért versenyszerű felmérésre egyre kevesebb diáknak van lehetősége.

A magyar tannyelvű iskolák diákjai, akik a környező országok nemzeti kisebbségét teszik ki, még rosszabb helyzetben vannak, mert állami támogatással évente csak egyszer vehetnek részt járási versenyeken.

Vannak ugyan próbálkozások, például emlékversenyek, ahol a résztvevők számát kissé emelni lehet. Ilyen például Kárpátalján a Bolyai János és Terebesi Viktor Emlékverseny matematikából, amit évente rendeznek a munkácsi II. Rákóczi Ferenc és a beregszászi Kossuth Lajos középiskolákban.

Ezenkívül, az utóbbi négy-öt évben, a nemzetközi feszültség csökkenésével a Magyarországon rendezett megyei és területi versenyeken is részt vehettek, vagy vendégdiákokat fogadhattak a környező országokból 5-6, esetleg 10 résztvevővel és 1-2 kísérő tanárral.

A szűkebb diaszpróra minden csücskében – gondolok itt a Magyarországot körülvevő területekre – élnek és működnek önfeláldozó tanárok, a matematika tanításának megszállottjai, mint például Szabó Magda (Szabadka), Oláh György (Szlovákia), Bencze Mihály (Románia), Balku Jenő (Nyíregyháza), Benedek Ilona (Vác), Najbauer Ferenc (Munkács) és sokan mások, akik fáradságot nem kímélve keresték a kapcsolatot egymás között, és megkezdték az előkészítést.

Az igény egy nemzetközi verseny szervezésére már régen megszületett, mégis csak 1991-ben a szegedi Rátz László Vándorgyűlésen tudtak először találkozni Erdély, Felvidék, Délvidék és Kárpátalja matematikatanárai, ahol Bencze Mihály (Brassó), Elek Ernő (Ungvár) és Oláh György (Rév-Komárom) ötletéből született meg a Nemzetközi Magyar Ma-

tematikaverseny megrendezésének gondolata. Az elsőt nyomban magára is vállalta Oláh György és 1992-ben, akkor még Csehszlovákiában, Rév-Komáromban meg is rendezte. A második nemzetközi versenyt 1993-ban a váci Boronkay György Műszaki Középiskola rendezte. A III. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1994. április 15-19 között, egyéni meghívásos formában került megrendezésre Ungváron 240 résztvevővel, amelyen 169 I-IV. évfolyamú gimnazista vett részt, mintegy 40 különböző iskolából, valamint a 8 fős ungvári Ukrán Anyanyelvű Alkotó Iskola diákjaiból álló csapat.

Nagyon nagy jelentősége a versenynek, hogy felmérhettük, milyen matematikai tudásszintet képviselnek a nemzeti kisebbségben élő magyar iskolák tanulói.

Ezenkívül a nemzeti identitástudat nevelésében is nagy szerepe van. Ezt az elvet szolgálta az ötnapos kultúrális program is, kirándulás az ungvári és a munkácsi várba, a Vereckeihágóra, színházlátogatás, múzeumok és képzőművészeti tárlatok megtekintése. A tanárok különböző fogadásokon vettek részt.

A feladatok és megoldásuk, a helyezettek névsora, valamint a diákok eredményei megjelentek nyomtatásban Dr. Kántor Sándorné és Dr. Kántor Sándor, a KLTE tanárai szerkesztésében, ezért csak az első díjasokat és a kitűzött feladatok szövegét ismertetem.

I. osztály

1. Igazoljuk, hogy a $2p+1$ alakú számok között, ahol p prímszám, pontosan egy olyan van, amelyik egy pozitív egész szám köbe!

2. Hány olyan – legalább kételemű – halmaz van, amelynek elemei egymást követő pozitív egész számok, és a halmaz elemeinek összege 100?

3. Egy kör AB átmérőjét messük el egy, az AB-vel 45°-os szöget bezáró CD húrral, AB és CD metszéspontját jelölje P. Igazoljuk, hogy $2(CP^2 + PD^2) = AB^2$!

4. Határozzuk meg a $2x^2 - 8xy + 17y^2 - -16x - 4y + 2062$ kifejezés legkisebb értékét, ha x és y tetszőleges valós számok!

5. Egy 2 egység kerületű háromszög oldalainak hossza a, b és c. Igazoljuk, hogy $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$ és $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbb{R}$ és $n > 0$ egész, akkor

$$\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n}\right] = 0,$$

ahol $[A]$ jelöli az A szám egészrészét, tehát azt a legnagyobb egész számot, amely nemnagyobb A-nál!

II. osztály

1. Határozzuk meg azokat a tízes számrendszerben felírt pozitív egész számokat, amelyek egyenlők számjegyeik összegének négyzetével!

2. Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$. Határozzuk meg az $M = (1+a)(1+b)(1+c)$ kifejezés minimumát!

3. Egy n lakosú városban klubokat szerveznek úgy, hogy bármely két klubnak legyen, és bármely három klubnak már ne legyen közös tagja. Legfeljebb hány klubot lehet így szervezni?

4. Az ABC derékszögű háromszögben meghúztuk az AB átfogóhoz tartozó magasságot, ennek talppontja D. A C csúcsból induló szögfelező az átfogót E-ben metszi. A $BDC\sphericalangle$ felezője CB-t M-ben, az $ADC\sphericalangle$ felezője AC-t N-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $CNEM$ négyszög négyzet!

5. Igazoljuk, hogy ha n és k pozitív egész számok, akkor

$$(2n)! + (2k)! \geq 2(n+k)!$$

és

$$(2n+1)! + (2k+1)! \geq 2(n+k+1)!,$$

ahol $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$.

6. Az $ABCDEF$ hatszög köré kör írható. Igazoljuk, hogy az AD, BE és CF átlók akkor és csak akkor metszik egymást egy O pontban (a kör belsejében), ha

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

III. osztály

1. Igazoljuk, hogy ha egy számtani sorozat elemei pozitív egész számok és van az elemek között négyzetszám, akkor végtelen sok négyzetszám is van a sorozat elemei között!

2. Legyenek a, b, c olyan valós számok, amelyekre $a+b+c=1$ és $a, b, c \geq -\frac{1}{4}$. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}!$$

3. Mutassuk meg, hogy az

$$S=\{x \in \mathbb{Q} \mid x=\frac{3k+4}{5k+2}, k=1,2,\ldots,100\}$$

halmaznak mind a 100 eleme különböző! Rendezzük őket nagyság szerinti sorrendbe!

4. Az ABC háromszög oldalaira az $AC^2+BC^2=2AB^2$ összefüggés áll fenn. Határozzuk meg a háromszög síkjában azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre $PA^2+PB^2=2PC^2$ teljesül!

5. Igazoljuk, hogy 2^{1994}-nek van olyan többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak az 1-es és 2-es számjegyeket tartalmazza!

6. A sík 6 különböző pontjában olyan fényszórók vannak elhelyezve, amelyeknek fénynyalábjai 60°-os szöget alkotnak. El lehet-e forgatni a fényszórókat úgy, hogy bevilágítsák az egész síkot?

IV. osztály

1. Igazoljuk, hogy ha x_1 és x_2 az $x^2-1994x+1$ másodfokú polinom gyökei, akkor minden $n>0$ egész számra $x_1^n+x_2^n$ pozitív egész szám!

2. Tekintsük azon $y=x^2+px+q$ egyenletű parabolák halmazát, amelyek a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy e ponthármasokon áthaladó körvonalaknak van közös pontja!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c>1$ vagy $0<a, b, c<1$ valós számok, akkor

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}!$$

4. Számítsuk ki (zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül) a következő szorzat értékét:

$$x=\sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ!$$

5. Határozzuk meg, hogy azok közül a tetraéderek közül, amelyeknek három, egy csúcsból induló éle páronként merőleges egymásra és összes élének hosszát összeadva egy h állandó értéket kapunk, melyiknek a térfogata maximális, és mennyi ez a térfogat!

6. Igazoljuk, hogy ha $n>0$ egész szám, akkor

$$e^{1-\frac{1}{2n}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}},$$

ahol $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a természetes logaritmus alapszáma!

I. osztály

Pap Gyula, 63 pont, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen

Megyeri Csaba, 48 pont, Batthány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

II. osztály

Szakács Botond, 51 pont, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy

Ságí Krisztián, 50 pont, Magyar Gimnázium, Rév-Komárom
Kerekes Péter, 48 pont, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Rozsnyai Ádám, 47 pont, Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Horváth Andrea, 46 pont, Alkotó Iskola, Ungvár
Gábos János, 45 pont, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy

III. osztály

Lázár Emese, 50 pont, Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Csapó Hajnalka, 49 pont, Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda

IV. osztály

Ivánka Gábor, 70 pont, Moise Nicoara Gimnázium, Arad
Odor Lajos, 48 pont, Magyar Gimnázium, Rév-Komárom
Birszki Bálint, 48 pont, Boronkai György Műszaki Középiskola, Vác

A délvidéki iskolák ugyan elküldték a nevezésüket, de politikai szempontokból az ottani hatóságok utazásukat nem engedélyezték.

A versenyfeladatokat a különböző középiskolai programok egyeztetése után a nemzetközi zsűri Bódi Béla (KLTE, Debrecen) elnökletével, Kántor Sándorné és Kántor Sándor (KLTE, Debrecen), Gecse Frigyes (Ungvári Állami Egyetem), Urbán János (Budapest) a beküldött feladatokból állította össze.

Fontosnak tartom megemlíteni a 70 kísérőtanárt, részben zsűri tagot, köztük a 22 kárpátaljai magyar anyanyelvű matematikatanárt, akik részt vettek a rendezvényen. Az ötnapos tapasztalatcsere megfelelt egy kisebb nemzetközi konferenciának.

Szinte mindenki hozott magával vagy kapott Kárpátalján matematikai kiadványokat, melyek között új tankönyvek, szakosított iskolák tankönyvei, feladatgyűjtemények, versenyfeladatok gyűjteménye és módszertani füzetek is voltak.

A versenyek eddigi eredménye is bizonyítja, hogy a versenysorozat életképes, a részvételre jelentkezők száma rohamosan növekszik.

Számos egyetemi tanár a verseny színvonalát méltatta, ami bizonyítható a Budapesti Műszaki Egyetemre, Eötvös Loránd Tudományegyetemre, Kossuth Lajos Tudományegyetemre valamint más felsőoktatási intézményekbe bejutott versenyzők számával is.

Javaslom ezen a versenysorozaton helyezést elért végzősök pontszámának figyelembevételét a felvételi vizsgákon, valamint a felvetteknek kollégiumokban való elhelyezését. Ezt a felvételi bizottságnak nem diszkriminációként kellene értékelni, hanem megérteni, hogy a tehetséges matematikusok az anyanyelven történő továbbtanulásának ez az egyetlen útja, mivel nem a diákoktól függ, hogy a helyzetük így alakult.

A versenybizottság a következő években is meg akarja rendezni a versenyt. A következő, a IV. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny Pakson, az Energetikai Szakképzési Intézet rendezésében zajlik majd, ahol az anyagi feltételek biztosítottnak látszanak. Az anyagi problémák minden második évben jelentkeznek, amikor a versenyeket Magyarországgal szomszédos országokban rendezik meg. A versenysorozat ugyanis állami támogatást nem élvez, létrejötte is alulról indult, nem intézményesen, ezért szponzorokra és anyagi támogatásra szorul.

A III. Nemzetközi Verseny támogatói között volt az Illyés Gyula Alapítvány, a Művelődési és Közoktatási Minisztérium Etnikai és Nemzeti Kisebbségi Főosztálya, a Kárpátaljai Pedagógiai Továbbképző Intézet, Ungvár Város Tanácsa, a debreceni KLTE, a Rákóczi Szövetség, a Juhász Gyula Alapítvány, a Boronkay György Műszaki Középiskola, a Szabolcs-Szatmár Megyei Pedagógiai Intézet, Neumann Iskola Alapítvány, az Ungvári Állami Egyetem, a Kárpátaljai Magyar Pedagógiai Szövetség.

A versenysorozat mindenki számára megfelelő időpontja az áprilisi hónap. A költségvetés általában február 1-jére ismert. Ezért a szponzorokkal való tárgyalás csak februárra, márciusra bonyolítható le. Ilyen rövid idő alatt egy

külföldinek előteremtenie az anyagiakat a verseny lebonyolítására és megszervezni a versenyt, a lehetetlennel határos. Ezért a versenybizottság úgy határozott, hogy a verseny támogatására egy alapítványt hoz létre.

Az alapítvány elnöke Elek Ernő Kezelőtestülete a Kuratórium tagjai: Oláh György (Révkomárom), Urbán János (Budapest), Benedek Ilona (Vác), Bencze Mihály (Brassó), Szabó Magda (Szabadka).

Uhrin János

Húrcsokrok az egységsugarú körben

$\Pi h_i = n$

A matematikatanítás egyik fontos célja a kutatás és felfedezés örömének megismertetése, a gondolkodás izgalmának és diadalának megízleltetése a sejtéstől a bizonyosságig, rácsodálkoztatás az ismeretek rejtett összefüggéseire, az esztétikai élmény felkeltése.

Ezeket a törekvéseket szeretné szolgálni az itt következő gondolatmenet: keskeny, lassan emelkedő, majd meredeken a felsőbb matematikához emelkedő „kutatóösvény". A leírás „in statu nascendi" történt, a kiinduló ötletet adó feladattal. A rávezetés azonban kezdődhet egyszerűbb esetekkel, amelyek nem igényelnek trigonometriai ismereteket. Első osztálytól kezdve, évről-évre visszatérhetünk a feladatra, vagy harmadikban egyszerre tárgyalhatjuk.

Kiemelkedő csoportokban kísérletet tehetünk a Csebisev-polinomokból következő, itt felhasznált összefüggés levezetésére is.

Lássuk most a feladatot!

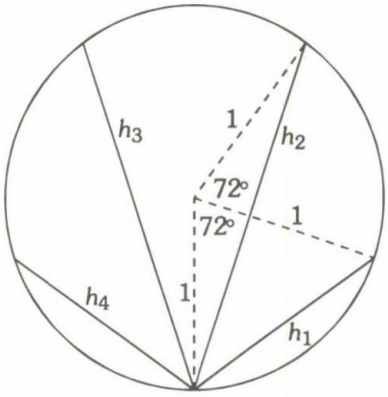
Osszuk fel az egységsugarú kör kerületét n egyenlő részre! Számítsuk ki az egyik osztáspontot a többivel összekötő $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{n-1}$ húrok hosszának szorzatát!

Speciális esetek:

Legyen $n = 5$.

Az 1. ábra szerint:

$$h_1 = h_4 = 2 \sin 36° = 2 \cdot 2 \cdot \sin 18° \cdot \cos 18°;$$
$$h_2 = h_3 = 2 \sin 72° = 2 \cdot \cos 18°;$$
$$h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4 = (8 \cdot \sin 18° \cdot \cos^2 18°)^2.$$



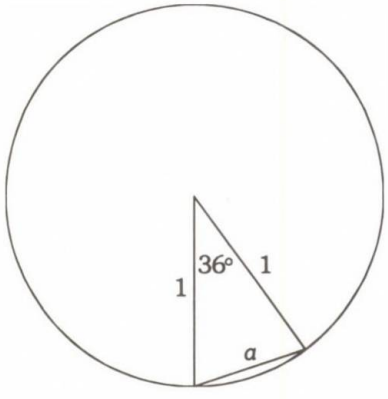
1. ábra

A 2. ábráról a szabályos tízszög oldala:

$$a = 2 \sin 18°$$

és ebből

$$\sin 18° = \frac{a}{2}.$$



2. ábra

A 3. ábra jelöléseivel a szögfelezőtétel szerint:

$$\frac{1-x}{x}=\frac{a}{1},$$

a hasonló hegyesszögű háromszögekből

$$\frac{1-x}{a}=\frac{a}{1}.$$

Ezekből:

$$x=a.$$

Visszahelyettesítve:

$$\frac{1-a}{a}=a,$$

innen

$$a^2+a-1=0,$$

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

a másik gyök negatív.
Ezt felhasználva

$$\sin 18°=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

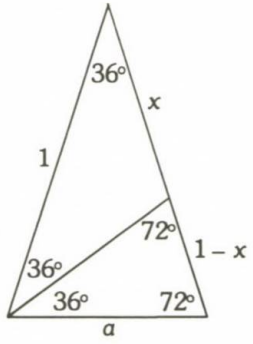
$$\cos^2 18°=1-\sin^2 18°=\frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

A húrok hosszának szorzata:

$$h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot h_4=$$

$$=\left(8\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2=5,$$

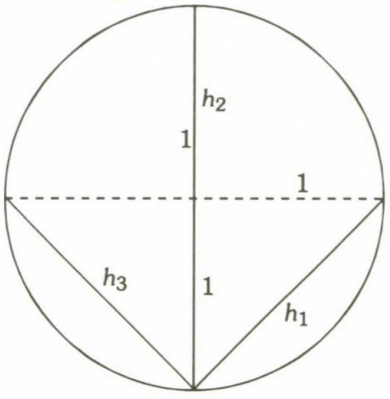
ami az osztópontok számával egyenlő.
Ez az érdekes eredmény további vizsgálatra ösztönöz.



3. ábra

Legyen $n = 4$.
A 4. ábrából:

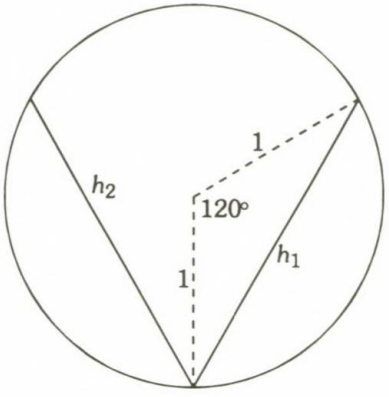
$$h_1\cdot h_2\cdot h_3=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=4.$$



4. ábra

Ha $n = 3$, akkor az 5. ábra alapján:

$$h_1\cdot h_2=(2\sin 60°)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2=3.$$



5. ábra

Nézzük az $n = 2$ esetet!
Érdekes, hogy ekkor az egyetlen húr (6. ábra) hossza éppen 2.
Alakuló sejtésünk megerősítésére növeljük az osztópontok számát és legyen

$n = 6$.
A 7. ábrából:

$$h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot h_4\cdot h_5=1\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1=6.$$

$n = 8$ esetén a 8. ábra jelöléseivel:

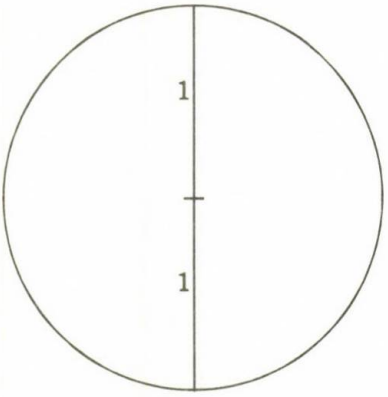
$$h_2=\sqrt{2},$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

$$h_1^2 = y^2 + x^2 = 2 - \sqrt{2},$$

$$h_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$h_3^2 = 2^2 - h_1^2 = 4 - \left(2 - \sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2}.$$

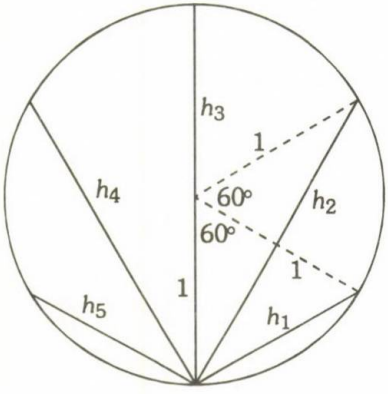


6. ábra

Ezek és a szimmetria felhasználásával

$$h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_7 = h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot h_4 =$$

$$\left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot 2 = 8.$$



7. ábra

Az általánosítás felé vezető úton legyen

$n = 7$.

A 9. ábra alapján:

$$h_1 = h_6 = 2\sin\frac{\pi}{7},$$

$$h_2 = h_5 = 2\sin 2\frac{\pi}{7},$$

$$h_3 = h_4 = 2\sin 3\frac{\pi}{7},$$

így

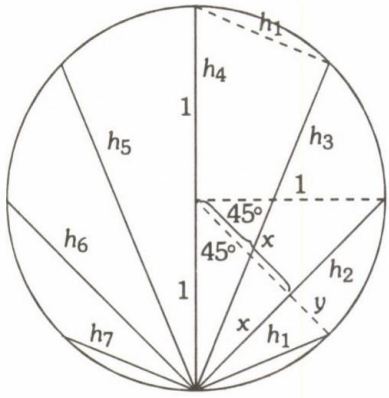
$$h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_6 = (h_1 \cdot h_2 \cdot h_3)^2;$$

közelítő értékekkel

$$= 2^6 \cdot (0{,}4338837 \cdot 0{,}7818315 \cdot 0{,}9749279)^2 =$$

$$= 6{,}9999991 \approx 7.$$

Ez az eredmény is erősíti a sejtést, és megmutatja, hogy közelítő értékek is segíthetnek a tájékozódásban a felfedezés útján.



8. ábra

Általánosítsuk most a feladatot!

Ha n páratlan, akkor a húrok száma páros, hosszuk (10. ábra):

$$h_1 = h_{n-1} = 2\sin\frac{\pi}{n},$$

$$h_2 = h_{n-2} = 2\sin 2\frac{\pi}{n},$$

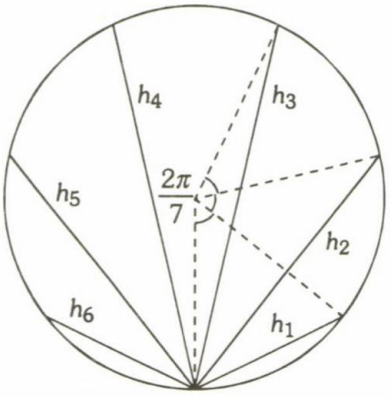
$$\vdots$$

$$h_{\frac{n-1}{2}} = h_{\frac{n+1}{2}} = 2\sin\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

A húrok hosszának szorzata:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} = \left(h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{\frac{n-1}{2}}\right)^2 =$$

$$= 2^{n-1} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}\right)^2.$$



9. ábra

Ha n páros, akkor a húrok száma páratlan, hosszuk (11. ábra):

$$h_1 = h_{n-1} = 2\sin\frac{\pi}{n},$$

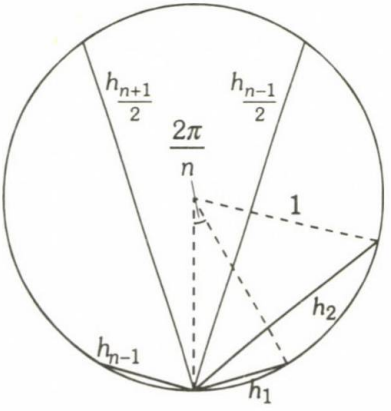
$$h_2 = h_{n-2} = 2\sin 2\frac{\pi}{n},$$

$$\vdots$$

$$h_{\frac{n-1}{2}} = h_{\frac{n+2}{2}} = 2\sin\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{n}$$

és

$$h_{\frac{n}{2}} = 2.$$



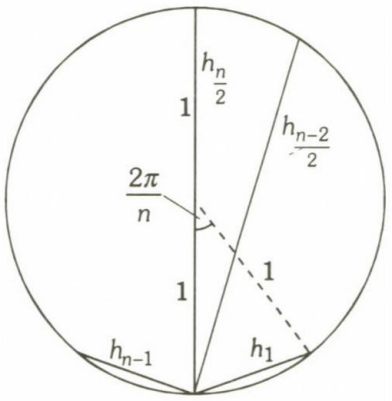
10. ábra

A húrok hosszának szorzata:

$$h_1\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_{n-1} = 2\left(h_1\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_{\frac{n-2}{2}}\right)^2 =$$

$$= 2\cdot\left(2^{\frac{n-2}{2}}\right)^2\cdot\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= 2^{n-1}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)^2.$$



11. ábra

Bebizonyítható, (ld. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei II. 30-33. oldal, Közoktatási Kiadóvállalat, Bp. 1951.) hogy minden n-re

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin(n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}. \qquad (*)$$

Mivel páratlan n esetén

$$\sin(n-1)\frac{\pi}{n} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{n}$$

és így tovább – a szimmetrikus tényezők egyenlők, a (*) így írható:

$$\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2^{n-1}},$$

továbbá páros n esetén a középső tényező

$$\sin\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

a szimmetrikus tényezők pedig szintén egyenlők, ezért (*) más alakban:

$$\left(\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n-2}{2}\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Visszatérve a húrok hosszának szorzatára, minden n-re:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} = 2^{n-1} \cdot \frac{n}{2^{n-1}} = n,$$

azaz

$$\prod_{i=1}^{n-1} h_i = n,$$

ami bámulatos egyszerűségével lenyűgözően szép eredmény.

A követett útnak érdekes leágazásai vannak. Ráirányíthatjuk a figyelmet a szerkeszthető szabályos sokszögekre, az ezekhez tartozó számítások elvégzésére.

A sejtés alapján igen valószínűvé válik, hogy a húrok szorzatát kifejező szorzat trigonometrikus tényezőjének értéke $\frac{n}{2^{n-1}}$. Ha tehát más módon sikerül igazolni a $\prod h_i = n$ egyenlőtlenséget, akkor lényegében igazoltuk a (*) összefüggést.

Kovács András

A függvénytranszformációk tanításáról

Tanulmányaik során diákjaink többször is találkoznak függvényekkel és ezeknek a függvényeknek a transzformációival. Ez utóbbiak, mivel minden, az iskolában tanított függvénygörbe esetében ugyanazokkal a geometriai műveletekkel írhatók le, alkalmasak arra, hogy velük a matematika különböző módszereit mutassuk be.

15 éves korban érdemes a felfedeztetést előtérbe helyezni. Így például a fordított arányosság függvényének egyszerűbb transzformációit értéktáblázat alkalmazásával célszerű ábrázolni, majd a grafikonokból az egyes transzformációlépések és a hozzájuk tartozó geometriai transzformációk közötti kapcsolatot feltárni. A változó – és függvényérték-transzformáció fogalmának megbeszélése után sort lehet keríteni az egyes lépések sorrendjének megállapítására, majd egy összetett feladat megoldására. A transzformációk egymás utáni alkalmazásával ábrázolt függvény képének helyességét szintén értéktáblázattal ellenőrizhetjük.

A kapott eredményekből a megfelelő következtetéseket levonva már könnyedén rajzolhatjuk meg az abszolútérték- és a másodfokú függvény transzformáltjainak grafikonját.

Egy évvel később ezeknek a tapasztalatoknak köszönhetően a trigonometrikus függvények transzformálásával már nem kell hosszú időt eltölteni. (Ezt a témakört az itt előforduló új ismeretek mennyisége és szokatlansága miatt egyébként még így sem könnyű jól elsajátítani tanulóinknak.)

Az exponenciális függvény ábrázolása a szögfüggvényeknél lényegesen egyszerűbb. Ezért, és hogy ne váljon az egész függvénytranszformáció unalmassá, célszerű egy összetett feladaton keresztül levezetni a transzformációk adott módon történő ábrázolását.

Lássunk erre egy példát!

Határozzuk meg, milyen geometriai transzformációval lehet az alábbi függvények grafikonját az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$ alapfüggvény grafikonjából származtatni!

1. $g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^{2x}$.

Ekkor az f függvény az x_1 helyen a 2^{x_1}, a g_1 függvény az x_2 helyen a 2^{2x_2} értéket veszi fel. A két függvényérték azonos, ha $x_1 = 2x_2$, azaz, ha $x_2 = \frac{x_1}{2}$.

Azt kaptuk, hogy a g_1 függvény $\frac{x_1}{2}$ helyen felvett értékei megegyeznek az f függvény x_1 helyen felvett értékeivel. Másképpen ezt úgy is mondhatjuk, hogy az f függvény képéből a g_1 függvény grafikonját az x tengely mentén vég-

rehajtott 1 : 2 arányú zsugorítással kaphatjuk meg. (Ugyanúgy, ahogyan azt az értéktáblázatos módszer már legelőször is megmutatta.) Ehhez a módszerhez teljesen hasonlóan lehet megmutatni azt, hogy az f függvényhez képest a kitevőben levő x előtti mínusz előjel az y tengelyre való tükrözést, míg az x melleti tag az x tengely mentén történő, előjelével ellentétes irányú eltolást jelent.

2. $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3} \cdot 2^x.$

Ekkor az f függvény az x_1 helyen a 2^{x_1}, a g_2 függvény ugyanezen a helyen az $\frac{1}{3} \cdot 2^{x_1}$ értékeket veszi fel, azaz az adott helyen a g_2 függvény által felvett értékek harmadakkorák, mint az f függvény által felvett értékek.

Ezt másképpen úgy mondhatjuk, hogy az f függvény grafikonjából a g_2 függvény grafikonját az y tengely mentén végrehajtott 1 : 3 arányú zsugorítással kaphatjuk meg. Az előző pontban alkalmazott leírás mintájára elmondhatjuk, hogy az itt ismertetett módszerhez teljesen hasonlóan lehet megmutatni azt, hogy az f függvényhez képest az exponenciális kifejezés előtti mínusz előjel az x tengelyre való tükrözést, míg az exponenciális kifejezés melletti tag az y tengely mentén történő, előjelével megegyező irányú eltolást jelent.

Ezt követően az eredmények összefoglalását itt is egy, az előző feladatra épülő, többlépcsőben végrehajtandó transzformációs feladat egészítheti ki.

Ilyen gyakorlattal a tanulóinknak nem jelenthet problémát az általánosítás. Ennek során keressük az $f : X_1 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ és a $g : X_2 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot f[b \cdot (x + c)] + d$; a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ függvények képe közötti kapcsolatot és azt a módszert, amelynek segítségével az f függvény grafikonjából kiindulva egyszerű geometriai transzformációk segítségével a g függvény képéhez juthatunk.

Az előzőekben alkalmazott módszer gondolatmenetét követve az f függvény az x_1 helyen az $f(x_1)$, a g függvény az x_2 helyen az $a \cdot f[b \cdot (x_2 + c)] + d$ értéket veszi fel. Az $f(x_1)$ függvényérték a-szorosához d-t adva az $a \cdot f(x_1) + d$ számhoz jutunk. Ez a függvény fogalmának meghatározásából következően biztos meg fog egyezni az $a \cdot f[b \cdot (x_2 + c)] + d$ számmal, ha $x_1 = b \cdot (x_2 + c)$, azaz, ha $x_2 = \frac{x_1}{b} - c$.

Tehát ekkor a g függvény az $x_2 = \frac{x_1}{b} - c$ helyen az $a \cdot f[b \cdot (x_2 + c)] + d = a \cdot f(x_1) + d$ értéket veszi fel. Másképpen: a g függvény alakja így a következő lesz:

$$g : X_2 (\subset \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R},\ \left(\frac{x_1}{b} - c\right) \mapsto a \cdot f(x_1) + d.$$

Könnyen látható ebből, hogy az egyes transzformációs lépések nem csak a szokott módon, az alábbiakban leírtak szerint követhetik egymást:

$$\begin{aligned}
&f : X_1 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto f(x),\\
&f_1 : X_1' (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto f(b \cdot x),\\
&f_2 : X_2 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto f[b \cdot (x + c)],\\
&f_3 : X_2 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto a \cdot f[b \cdot (x + c)],\\
&f_4 : X_2 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto a \cdot f[b \cdot (x + c)] + d.
\end{aligned}$$

Erre az esetre láthatunk példát dr. Ábrahám - Bedő - dr. Czétényi - Frigyesi - Juhász - dr. Korányi: Matematika a felvételi vizsgára készülők részére (81 303) vagy éppen Hajnal Imre: Matematikai fogalmak, tételek (Mozaik Oktatási Stúdió) című könyvekben.

A transzformációkat – bár nem szokás – a következőképpen is végre lehet hajtani:

$$\begin{aligned}
&f : X_1 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto f(x),\\
&f_1 : X_1 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto a \cdot f(x),\\
&f_2 : X_1 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && x \mapsto a \cdot f(x) + d,\\
&f_3 : X_1' (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && \frac{x}{b} \mapsto a \cdot f(x) + d,\\
&f_4 : X_2 (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && \left(\frac{x}{b} - c\right) \mapsto a \cdot f(x) + d,
\end{aligned}$$

A tapasztalatoknak, a műveletvégzés megállapodás szerinti sorrendjének megbeszélése után következhet a logaritmus függvény ábrázolása. Ekkor már meg lehet beszélni olyan transzformációs lépéseket is, amelyek ritkábban vagy egyáltalán nem fordulnak elő a tanulók számára ajánlott feladatgyűjtemények-

ben. Ilyen például az abszolútérték, a hatványra emelés, a gyökvonás, az egészrész, a törtrész, az összetett függvények transzformációja stb.

Összegzésképpen megállapíthatjuk, hogy az itt vizsgált témakör anyagának látszólagos ismétlődése ellenére lehetőséget kínál arra, hogy diákjaink ennek a résznek az alapos elsajátítása mellett a kísérletezéstől az általánosításig eljutva a matematika különböző módszereit gyakorolják.

Fitos László

Egy szabályos háromszögre vonatkozó tétel általánosítása

1. A tétel, amit általánosítani fogunk, a következő:

Ha egy szabályos háromszög csúcsait A_1, A_2, A_3-mal, beírt körének egy tetszőleges pontját P-vel, köré írt körének egy tetszőleges pontját Q-val jelöljük, akkor

$$\frac{PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + QA_3^2} = \frac{5}{8}.$$

Bizonyítás: Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy a tételben szereplő négyzetösszegek hányadosának számértéke nem függ a háromszög nagyságától, hiszen k arányú centrális nyújtást alkalmazva, a számláló is meg a nevező is k^2-tel szorzódik és így a tört értéke ugyanaz marad. Ezért a háromszög nagysága szabadon választható.

Helyezzük el a háromszöget koordináta-rendszerben az 1. ábra szerint és legyen az egyszerűség kedvéért a beírt kör sugara egységnyi hosszú! Akkor a csúcsok, valamint a P és Q pont koordinátái a következők lesznek: $A_1(-1; \sqrt{3})$, $A_2(-1; -\sqrt{3})$, $A_3(2; 0)$, $P(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $Q(2\cos\beta; 2\sin\beta)$, ahol α az OP, β pedig az OQ szakasz irányszöge.

Két pont távolságának képletével a két négyzetösszeg számértéke a következő:

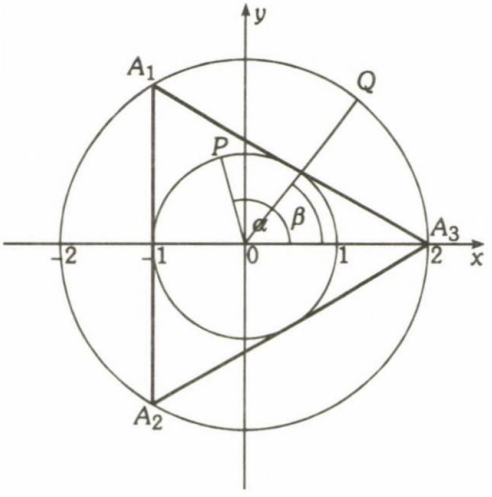
$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = (\cos\alpha + 1)^2 + (\sin\alpha - \sqrt{3})^2 + (\cos\alpha + 1)^2 + (\sin\alpha + \sqrt{3})^2 + \\ + (\cos\alpha - 2)^2 + \sin^2\alpha = 3 + 3 \cdot 4 = 15$$

és

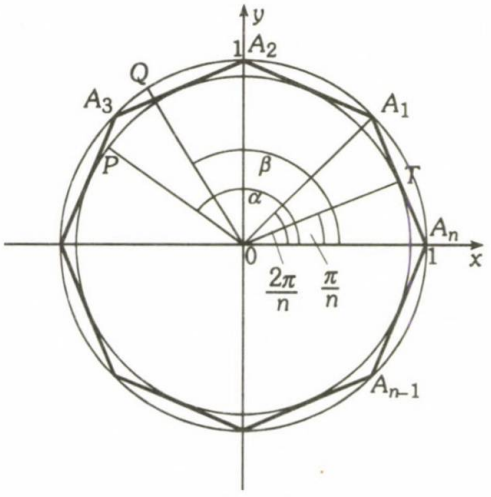
$$QA_1^2 + QA_2^2 + QA_3^2 = (2\cos\beta + 1)^2 + (2\sin\beta - \sqrt{3})^2 + (2\cos\beta + 1)^2 + (2\sin\beta + \sqrt{3})^2 + \\ + (2\cos\beta - 2)^2 + (2\sin\beta)^2 = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 24.$$

Tehát a keresett hányados: $\frac{15}{24}$, azaz $\frac{5}{8}$.

Abból, hogy α és β kiesett, az következik, hogy a beírt, illetve körülírt kör bármelyik pontjában vesszük is fel P-t, illetve Q-t, a négyzetösszegek hányadosa mindig ugyanakkora mégpedig $\frac{5}{8}$.



1. ábra



2. ábra

2. Általánosítás szabályos *n* oldalú sokszögre

Azt kell igazolnunk, hogy ha egy szabályos n oldalú sokszög csúcsait A_1-, A_2-, ..., A_n-nel, beírt körének tetszőleges pontját P-vel, körülírt körének tetszőleges pontját Q-val jelöljük, akkor a

$$\frac{PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2}$$

tört értéke csak a sokszög oldalainak számától, n-től függ.

Bizonyítás: Válasszuk a körülírt kör sugarát egységnyi hosszúnak, hiszen nagyítás és kicsinyítés esetén itt sem változik meg a szóbanforgó tört értéke. Ezután helyezzük el a sokszöget koordináta-rendszerben a 2. ábra szerint! Ekkor a csúcsok koordinátái: $A_1\left(\cos\frac{2\pi}{n}; \sin\frac{2\pi}{n}\right)$, $A_2\left(\cos\frac{4\pi}{n}; \sin\frac{4\pi}{n}\right)$, ..., $A_n(1; 0)$, a beírt kör sugara: $OP = OT = \cos\frac{\pi}{n}$, a P és Q pont koordinátái pedig: $P\left(\cos\frac{\pi}{n}\cos\alpha; \cos\frac{\pi}{n}\sin\alpha\right)$, $Q(\cos\beta; \sin\beta)$, ahol α az OP, β pedig az OQ szakasz irányszöge.

Mindezek alapján a számlálóban levő négyzetösszeg:

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2 = \left(\cos\frac{\pi}{n}\cos\alpha - \cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{n}\sin\alpha - \sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 +$$

$$+\left(\cos\frac{\pi}{n}\cos\alpha - \cos\frac{4\pi}{n}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{n}\sin\alpha - \sin\frac{4\pi}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\cos\frac{\pi}{n}\cos\alpha - 1\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{n}\sin\alpha\right)^2 =$$

$$= n\cos^2\frac{\pi}{n} + n - 2\cos\frac{\pi}{n}\cos\alpha\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + 1\right) -$$

$$-2\cos\frac{\pi}{n}\sin\alpha\left(\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + 0\right) = n\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{n}\right),$$

mert a zárójeles kifejezések nullával egyenlők. Ugyanis a sokszög súlypontja az origó, ezért a csúcsok abszcisszáinak számtani közepe, valamint ordinátáinak számtani közepe egyaránt nulla.

A nevezőben levő négyzetösszeg pedig:

$$QA_1^2+QA_2^2+\ldots+QA_n^2=\left(\cos\beta-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\beta-\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2+$$

$$+\left(\cos\beta-\cos\frac{4\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\beta-\sin\frac{4\pi}{n}\right)^2+\ldots+(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta=$$

$$=n\cdot1+n\cdot1-2\cos\beta\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+1\right)-2\sin\beta\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+0\right)=2n,$$

mert az előyőekhez hasonlóan, a zárójeles kifejezések itt is nullával egyenlők.

Végül a két négyzetösszeg hányadosa, vagyis az általános tétel:

$$\frac{PA_1^2+PA_2^2+\ldots+PA_n^2}{QA_1^2+QA_2^2+\ldots+QA_n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2\frac{\pi}{n}\right).$$

Ez a képlet tetszőleges oldalszámú és nagyságú szabályos sokszög esetén megadja a kérdéses hányados értékét, tehát n helyébe hármat helyettesítve, $\frac{5}{8}$-ot kell kapnunk. Ez valóban így van, hiszen $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ és így:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{8}.$$

Az is megállapítható, hogy ha $n\to\infty$, akkor a szóbanforgó hányados értéke 1-hez tart, hiszen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\cos^2\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

Irodalom

[1] A Matematika Tanítása, 1974. évi 3. szám, 94. lap 761. feladat

Csordás Mihály

A Zrínyi Ilona Országos Matematikaverseny

A matematikát tanító pedagógusok körében talán nem ismeretlen a tanulók között egyre népszerűbb Zrínyi Ilona Országos Matematikaverseny. Ezt a népszerűséget igazolja az elindult versenyzők egyre növekvő létszáma.

Ez a verseny lényegesen eltér a hagyományos versenyektől. Alapvetően új benne, hogy nagyon rövid idő alatt (egy feladatra átlagosan 3 perc jut) kell kiválasztani az öt válasz közül az egyetlen helyeset. Ez egyszerűnek tűnik, de ha valaki versenyszerűen megold egy feladatsort, azonnal rájön, hogy találgatással, tippe-

léssel nem sok eredményt érhet el. Matematikából az ilyen tesztekkel való számonkérés, versenyeztetés több országban általánosan elfogadott. Nálunk a pedagógusok nagy része nem alkalmazza, idegenkedik a tanulók tudásának ilyen mérésétől. Mi hiszünk abban, hogy a tesztekkel való tanulói teljesítménymérés matematikából is helyet kap oktatásunkban.

	Elindult tanulók száma	Résztvevő iskolák száma
1990. évi verseny (városi)	470	27
1991. évi verseny (megyei)	1370	86
1992. évi verseny (országos)	13600	760
1993. évi verseny (országos)	31338	1372
1994. évi verseny (országos)	38661	1595

A Zrínyi Ilona Matematikaversenyek 3 éves (1991-93) teljes anyaga ez év január végén megjelent Matematikai versenytesztek című könyv formájában. Ennek a könyvnek a sikere inspirálta a szerzőket arra, hogy az 1994. évi verseny teljes anyagát (feladatsorok, megoldások, eredmények) is megismertesse az érdeklődőkkel.

A kiadvány szerkezete megegyezik az előzőével. A feladatok, a megoldások külön fejezetben kaptak helyet, így a feladatsorok önállóan is feldolgozhatók. A megoldások során a szerzők a nem tesztes (teljes igényű) matematikai megoldásokat közlik, emellett nem hanyagolják el a tesztes jellegből adódó lehetőségeket sem. Az egyes feladatok megoldásai után megtalálható, hogy az adott válaszokat a tanulók hány százaléka fogadta el helyesnek. Ezek feltüntetése a gyakorló pedagógusoknak nyújthat nagy segítséget bizonyos típushibák felismerésében. A könyv harmadik részében amegoldókulcsok mellett a verseny évfolyamonkénti eredményei is helyet kaptak: az országos döntő első 30 helyezettjének neve (az első 10 esetében a felkészítő tanáré is) és a megyei/kerületi forduló alapján az évfolyamonkénti 40 legeredményesebb iskola.

A könyv a különböző nehézségű szintű és érdekes feladatai révén jól használható a tanítási órákon a matematika iránti érdeklődés felkeltésére, a tehetségesebb tanulók tanórai foglalkoztatására, versenyekre való iskolai és otthoni felkészülés során. Ajánljuk még mindkét könyv használatát az 1995. évi Zrínyi Ilona Matematikaversenyre való felkészüléshez.

Az idei tanév versenyének 1. fordulója 1995. március 4-én (pénteken) 14 órakor kerül megrendezésre. A 2. forduló Kecskeméten, 1995. április 13-án lesz, ahová az 1. fordulóban legeredményesebben szerepelt tanulók kapnak meghívást.

Matematika feladatmegoldó pontverseny II. forduló

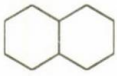
Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztály)

94.25. Andrisnak, Bélának és Csabának együtt 40 forintja van (mindegyiknek van pénze). Ha Andris forintjainak számához hozzáadjuk Béla forintjai számának 481-szeresét, akkor Csaba forintjai számának 999-szeresét kapjuk. Mennyi pénzük van külön-külön?

94.26. Keressünk olyan tízjegyű egész számot, amely csupa különböző számjegyből áll, és a szám fele is ugyanilyen tulajdonságú (tehát tízjegyű egész szám és csupa különböző számjegyből áll)!

94.27. A „hagyományos" dominó két olyan egybevágó négyzetből áll, amelynek egy oldala közös:

Egybevágó szabályos hatszögekből is építhetünk dominót, így:



A két hatszög egy oldala közös. Három egybevágó hatszögből triminót építhetünk úgy, hogy a harmadik hatszög egy oldala csatlakozik a dominó valamelyik már meglévő hatszögének egyik oldalához. Ezt háromféleképpen tehetjük meg:

Az eltolással, elforgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető triminókat nem tekintjük különbözőknek.

Készítsd el az összes különböző, egybevágó hatszögekből felépülő *tetraminót* (négy hatszögből áll) és *pentaminót* (öt hatszögből áll)!

94.28. Van 6 külsőre egyforma érménk, de tudjuk, hogy néhány közülük hamis, ezek egy „hajszállal" könnyebbek, mint a valódiak. Van egy pontosan mérő kétkarú mérlegünk, súlyok nélkül. Legalább hány mérés kell ahhoz, hogy külön tudjuk választani a hamis érméket a valódiaktól?

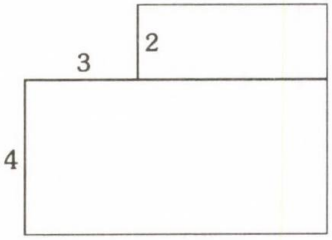
Tervezd meg a méréseket! (Jelöld meg az egyes érméket, például az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal és írd le, melyik mérésnél melyik érméket teszed az egyes serpenyőkbe!)

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztály)

94.29. Andris, Béla, Csaba, Dénes és Endre gyűjtik az érméket. Legutóbb is mindegyikük vásárolt egy-egy érmét. Az egyes érmek ára növekvő sorrendben 5, 25, 125, 625 és 3125 Ft volt. Miután kifizették az érmeket, Andrisnak 1, Bélának 2, Csabának 3, Dénesnek 4 és Endrének 5 Ft-ja maradt. Ha mindenki megszorozza az általa kifizetett összeget annyival, ahány forintja maradt, és a kapott szorzatokat összeadják, akkor 9615 jön ki. Melyik fiú hány forintért vásárolta az érmet?

94.30. Igazoljuk, hogy ha egy 10×10-es sakktábláról a 4 sarokmezőt kivágjuk, akkor a megmaradt 96 mezőből álló rész nem fedhető le egyrétűen és hézagtalanul 16 darab 1×6-os „dominóval"! (Valójában ezeket hexaminónak, azaz hatkövűnek célszerű hívni.)

94.31. Adott két, nemegybevágó téglalap. Az ábrán bizonyos méreteket is megjelöltünk (ez lehet pl. cm vagy más „egység" is). Ha ezeket a téglalapokat papírból készítjük el, akkor hány vágással lehet feldarabolni őket úgy, hogy a kapott részekből egyetlen téglalapot lehessen összeállítani?



94.32. Legyen A egy tetszőleges, 10-nél nagyobb egész szám! Az A tízes számrendszerbeli alakjában töröljük az utolsó (egyesek helyén álló) számjegyet, majd az így kapott számhoz hozzáadjuk a kitörölt számjegy kétszeresét. Így a B számot kapjuk.

Igazoljuk, hogy vagy A is és B is osztható 19-cel, vagy egyik sem osztható 19-cel!

* * *

A versenyfelhívás A matematika tanítása 1994. évi 4. számában olvasható.

A megoldásokat a következő címre kérjük küldeni:

Mozaik Oktatási Stúdió
6701 Szeged Pf. 301.

A borítékra kérjük írják rá: *Matematika feladatmegoldó pontverseny*. A beküldési határidő: *1994. december 31.*

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **1052 Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10**. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

25. Legyen H egy n elemű halmaz, melynek hatványhalmazát (H részhalmazainak halmazát) jelölje $P(H)$! Hány olyan (A, B) halmazpár van, amelyre

$$A \in P(H),\ B \in P(H),\ \text{és}\ A \subseteq B$$

teljesül?

26. Van-e olyan p és q pozitív egész, amelyekre az

$$1992^p + 2 \quad \text{és} \quad 1992^q + 3$$

négyzetszámok?

(Kiss Sándor, Szatmárnémeti)

27. Igazoljuk, hogy végtelen sok természetes egész megoldása van a

$$\sqrt[3]{x - y\sqrt{z}} + \sqrt[3]{x + y\sqrt{z}} = 1994$$

egyenletnek!

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

28. Hány olyan háromszög van, amelyre igaz, hogy oldalainak hosszát egész szám méri, és a leghosszabb oldal m egységnyi?

(Ambrus Gabriella, Budapest)

29. Az $ABC_\triangle$ BC oldalán a D, az AC oldalán az E pont olyan, hogy

$$AD = BE,$$

és

$$\frac{BAD\sphericalangle}{DAC\sphericalangle} = \frac{ABE\sphericalangle}{EBC\sphericalangle}$$

Bizonyítsa be, hogy $CA = CB$!

30. Igazoljuk, hogy a *pitagoraszi számhármasok* között mindig van kettő olyan, amelyeknek összege vagy a különbsége a 7-nek többszöröse!

(Bencze Mihály, Brassó)

* * *

Feladatmegoldások (7-12. feladatok)

7. Az $ABCD$ négyzetbe úgy írtuk be az XYC háromszöget, hogy annak X csúcsa az AD, Y csúcsa az AB oldalon legyen. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög kerülete kisebb az $AC + BD$ összegnél!

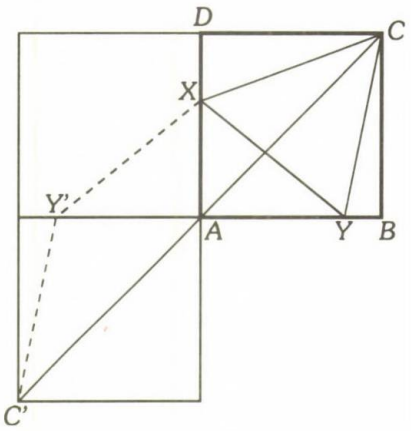
Megoldás: Valamennyi olvasónk észlelte, hogy az állítás így nem igaz. Helyesen az ellenkezője áll: nemkisebb, pontosabban az $AC + BD$ összegnél nagyobb a háromszög kerülete. Ez utóbbi állítást fogjuk igazolni. Tükrözzük a négyzetet az AB oldalára és az A csúcsára is! Az 1. ábra jelöléseivel: az $AC = BD$ miatt

$$AC + BD = CC',$$

és a tükrözések távolságtartó tulajdonsága miatt

$$CX + XY + YC = CX + XY' + Y'C'.$$

Ám két pontot összekötő valódi töröttvonal mindig hosszabb az őket összekötő szakasznál, ezért a háromszög kerülete nagyobb az $AC + BD$ összegnél.



1. ábra

(Csorba Ferenc, Győr)
(Mészáros József, Galánta)

A megoldók száma: 13.

8. Egy n természetes számot „*jó*"-nak mondunk, ha pontosan egyféleképpen bontható fel olyan, legalább kéttagú természetes számokból álló összegre, ahol a tagok szorzata szintén n. (Csak a tagok sorrendjében különböző összegeket nem tekintjük különbözőknek.) Melyek a „*jó*" természetes számok?

(Ambrus Gabriella, Budapest)

Megoldás: Mivel

$$A \cdot B - A - B = (A-1)(B-1) - 1,$$

ezért, ha az n „*jó*", úgy az $n = A \cdot B$ szorzattá bontásban A és B mindegyike legalább 2-vel egyenlő. Ebből tüstént adódik, hogy sem az 1, sem a prímszámok nem lehetnek „*jók*". Legyen $n = A \cdot B$, ahol $A, B > 1$! Ekkor $n = A + B + (A \cdot B - A - B)$ darab egyessel. E felbontás megfelelő is. Ha most $n = C \cdot D$ is fennállana, úgy egynél több (összegre való) felbontása lenne az n-nek. Így beláttuk, hogy pontosan azok a természetes számok a „*jó*"-k, amelyek két, nem feltétlenül különböző prímszám szorzataként adódnak.

(Blázsik Zoltán, Szeged)
(Kocsis Orsolya, Szolnok)

A megoldók száma: 10.

9. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 4xyz = 0.$$

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

Megoldás: Az $x = y = z = 0$ kielégíti egyenletünket. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. Tegyük fel, hogy a nem csupa 0-ból álló x_1, y_1, z_1 számhármas megoldása egyenletünknek! Ekkor bármely $k \neq 0$ egészre a (kx_1, ky_1, kz_1) is megoldás. Elegendő tehát az $(x_1; y_1; z_1) = 1$ alapmegoldásokat megkeresnünk. Ha van ilyen számhármas, akkor x_1 páros kell legyen, mivel az egyenlet többi tagja mind páros. Ha tehát $x_1 = 2t$, úgy egyenletünkből helyettesítés és egyszerűsítés után

$$y_1^3 = 4ty_1z_1 - 4t^3 - 2z_1^3$$

miatt y_1 is páros. Az eddigiekhez hasonlóan kapjuk, hogy z_1 is páros kell legyen, ami viszont ellentmond az $(x_1; y_1; z_1) = 1$ feltételünknek.

(Csorba Ferenc, Győr)
(Nagy Róbert, Győr)

Megjegyzés: Hasonló meggondolásokkal igazolhatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{2n+1} 2^{k-1} \cdot x_k^{2n+1} = 2^r \cdot \prod_{k=1}^{2n+1} x_k$$

egyenletnek $n \geq 1$, $r > 1$ egészekre csak triviális megoldása van.

(András Szilárd Károly, Csíkszereda)

A megoldók száma: 12.

10. Legyen P a valós számoknak egy n elemű részhalmaza! A P elemeivel elkészítjük az $\binom{n}{2}$ darab, páronként vett számtani közepeket. Ezek halmazát jelölje A_p! Legalább hány elemű az A_p?

Megoldás: Feltehetjük, hogy P elemei különbözőek és $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ teljesül.
Ekkor

$$x_i < \frac{x_i + x_{i+1}}{2} < x_{i+1} \quad (1 \le i < n),$$

így $n-1$ különböző elem adódik.

Másrészt

$$x_i < \frac{x_i + x_{i+2}}{2} < x_{i+2} \quad (1 \le i < n-2),$$

és

$$a = \frac{x_i + x_{i+2}}{2} \neq x_{i+1},$$

$$a \neq \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad a \neq \frac{x_{i+1} + x_{i+2}}{2}.$$

Így újabb $n-2$ különböző (az előző $n-1$ elemtől is különböző) elem adódik. Ez azt jelenti, hogy (eddig) az A_p halmaz legalább $2n-3$ elemű. Könnyen látható, hogy a $2n-3$ alsó korlát éles, hiszen pl. a $P := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazra A_p elemeinek száma $2n-3$.

(Csorba Ferenc, Győr)

Megjegyzés: Ha A_p^k jelöli a k-nkénti számtani közepek halmazát, akkor ennek legalább $k(n-k)+1$ eleme van $(n \ge k)$. Ugyanis az $x_i < x_j$, ha $i < j$ feltétellel

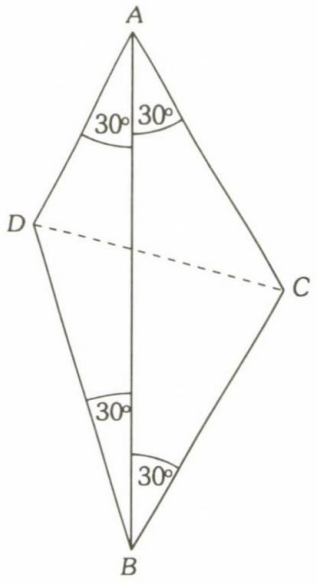
$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \ldots + x_k < x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + \\ + x_{k+1} < \ldots < x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_n < \\ < x_1 + \ldots + x_{k-2} + x_k + x_n < \ldots < x_1 + \ldots + \\ + x_{k-2} + x_{n-1} + x_{n-2} < x_1 + \ldots + x_{k-3} + x_{k-1} + \\ + x_{n-1} + x_n < x_1 + \ldots + x_{k-3} + x_k + x_{n-1} + \\ + x_n < \ldots < x_1 + \ldots + x_{k-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n < \\ < \ldots < x_{n-k+1} + \ldots + x_n. \end{gathered}$$

A fenti láncban pontosan $k(n-k)+1$ darab különböző összeg szerepel, ennélfogva $\left|A_p^k\right| \ge k(n-k)+1$. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazra pedig $\left|A_p^k\right| = k(n-k)+1$.

(András Szilárd Károly, Csíkszereda)

A megoldók száma: 8.

11. Mutassuk meg, ha egy tetraéder minden lapszöge egyenlő, akkor a tetraéder szabályos! Igaz marad-e az állítás, ha csak öt lapszögről tudjuk, hogy egyenlők?



2. ábra

Megoldás: A lapszögek egyenlőségéből következik, hogy a tetraéder minden lapja szabályos háromszög, ebből pedig már a tetraéder szabályossága nyilvánvaló. Ha ugyanis a tetraéder egy csúcsánál lévő háromélű szögletet egy gömb középpontjába helyezzük, akkor a szöglet élei a gömbfelületet – a lapszögek egyenlősége miatt – egy egyenlőszögű gömbháromszög csúcsaiban döfik. A gömbháromszögekre is teljesül, hogy egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak (a triéder élszögei) vannak, így tetraéderünk valamennyi élszöge egyenlő, azaz a tetraéder szabályos. Létezik viszont olyan (nem szabályos) tetraéder, amelynek van öt egyenlő lapszöge. Legyen az $ABC_\triangle$ egy 120°-os szárszögű egyenlőszárú háromszög! E háromszöget forgassuk el az AB egyenes körül úgy, hogy a $CAD\sphericalangle = 30°$ legyen (2. ábra, D a C-nek elforgatottja)! Ilyen elforgatás létezik, hiszen a forgatás során keletkező $CAD\sphericalangle$ két lap lapszögének folytonos függvénye, és mivel a

$0 \le CAD\sphericalangle \le 60°$, ezért van olyan lapszög, amelyre $CAD\sphericalangle = 30°$. Az így nyert $ABCD$ tetraéderben az A élű ill. a B élű lapszögek egyenlők, mert a $\frac{\pi}{6}$ oldalú szabályos gömbháromszögek szögei is (vagyis a tetraéder megfelelő lapszögei) egyenlők, de $AB > AC$ miatt a tetraéder nem szabályos.

(András Szilárd Károly, Csíkszereda és)
(Nagy Róbert, Győr megoldásaiból)

A megoldók száma: 3.

12. Igazoljuk: $f : n \mapsto 1 - n$ az egyetlen olyan egész számokon értelmezett függvény, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik!

(*i*) $f(f(n)) = n$, minden egész n-re;
(*ii*) $f(f(n + 2) + 2) = n$, minden egész n-re;
(*iii*) $f(0) = 1$.

(Am. Math. Monthly)

Megoldás: I. $f : n \mapsto 1 - n$ függvény valóban rendelkezik a fenti tulajdonságokkal:

(*i*) $f(f(n)) = f(1 - n) = 1 - (1 - n) =$
$= 1 - 1 + n = n;$

(*ii*) $f(f(n + 2) + 2) = f[1 - (n + 2) + 2] =$
$= f(1 - n - 2 + 2) = f(1 - n) =$
$= 1 - (1 - n) = n;$

(*iii*) $f(0) = 1 - 0 = 1.$

II. Tegyük fel, hogy az egész számokon értelmezett $f(n)$ függvényre mindhárom tulajdonság teljesül! Ha valamely n_1 és n_2 helyeken $f(n_1) = f(n_2)$, akkor az (*i*)-ből $n_1 = f(f(n_1)) =$ $= f(f(n_2)) = n_2$ következik, vagyis a függvény ugyanazt a függvényértéket csak ugyanazon a helyen veheti fel. Ebből és az (*i*), (*ii*) tulajdonságokból következik:

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2),$$

$$f(n) = f(n + 2) + 2,$$

vagyis az

$$f(n + 2) = f(n) - 2$$

rekurzív formulát kapjuk.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy mindhárom tulajdonsággal csak az $f : n \mapsto 1 - n$ függvény rendelkezik! Az (*i*) és (*iii*) tulajdonságokból $-f(f(0)) = 0$ és $f(0) = 1$ adódik, hogy

$$f(1) = 0.$$

Így az $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$ már az összes $f(n)$ függvényértéket generálja, mivel rekurzív formulánk

$$f(2k + 2) = f(2k) - 2 = 1 - 2k - 2 =$$
$$= 1 - (2k + 2),$$

és $n = 2k + 1$-re

$$f(2k + 3) = f(2k + 1) - 2 = 1 - (2k + 1) - 2 =$$
$$= 1 - (2k + 3).$$

(Kiss Géza, Kisújszállás)
(Kocsis Orsolya, Szolnok)
(Prahovean Cornel, Brassó)

A megoldók száma: 9.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (7-10., 12.); András Szilárd Károly, Csíkszereda (7-12.); Berta László, Benczurfalva (7.); Bíró Bálint, Eger (7., 9. 2 mód); Blázsik Zoltán, Szeged (7-12.); Csete Lajos, Markotabödöge (7., 8., 9. 2 mód, 10., 12.); Csorba Ferenc, Győr (7-10.); Kiss Géza, Kisújszállás (7-9., 12.); Kocsis Orsolya, Szolnok (7-10., 12.); Mészáros József, Galánta (7-9.); Nagy Róbert, Győr (7-12.); Prahovean Cornel, Brassó (7., 9., 10., 12.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (7., 8., 9. 2 mód,12.).

HÍREK VERSENYEKRŐL

A Bátaszéki Általános Iskola által meghirdetett 5. Tolna megyei általános iskolai matematikaverseny

Az immár hagyományosnak mondható versenyt a bátaszéki általános iskola tanára és a Tolna megyei matematika szaktanácsadó, *Károlyi Károly* szervezi és szakmailag vezeti. A verseny a megyén túl is hamarosan népszerűvé vált, budapesti iskolák, sőt még Szlovákiából magyar tannyelvű iskolák is részt vesznek rajta.

A verseny három fordulós. A döntő Bátaszéken volt, 1994. március 12-én. A verseny érdekessége, hogy 4.-től 8. osztályig, öt korcsoportban rendezik meg, és bár azonos feladatsort írnak, külön versenyeznek a hat- és nyolosztályos gimnáziumi tanulók, valamint az általános iskolai tanulók.

Az alábbiakban a verseny 3., döntő fordulójában kitűzött feladatokat ismertetjük:

4. osztály

1. Egy anya és két gyermeke életkorának összege 60 év. Milyen idősek a gyermekek, ha tudjuk, hogy a nagyobbik háromszor olyan idős, mint a kisebbik és az anya életkora kétszer nagyobb a gyermekek éveinek összegénél.

2. Rajzolj több módon is olyan téglalapot, amelynek a területe 24-szerese a füzetlapodon található kis négyzetnek! Írd mindegyik téglalap alá, hogy a kerülete hányszorosa a kis négyzet kerületének!

3. Tudjuk azt, hogy az a, b, c egymás utáni természetes számok kielégítik a

$$308 + a + 308 + b + 308 + c + 308 = 1994$$

egyenlőséget. Határozzuk meg az a, b, c számokat!

4. Hat borítékba szétosztottunk 40 darab egyforintost, és a borítékokat leragasztottuk, majd ráírtuk a „tartalmát". Minden borítékra más szám került. Érdekes, hogy csak ezekkel a borítékokkal anélkül, hogy felnyitnánk őket, bármilyen összeget ki tudunk fizetni 40 forintig. Mennyi pénz volt az egyes borítékokban?

5. Az alábbi összeadásban a különböző betűk különböző számjegyeket takarnak. Határozd meg az egyes betűk értékét és írd fel számjegyekkel az összeadást!

$$\begin{array}{r} \text{ÖT} \\ +\text{ÖT} \\ \hline \text{TÍZ} \end{array}$$

5. osztály

1. Egy munkás fémrudacskákat kapcsol össze és láncot készít. Ha 5 rudacskából 30 perc alatt készít láncot, számítsd ki, hogy mennyi idő alatt kapcsol össze 45 láncszemet!

2. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek számjegyei különbözők s nem nullára végződik?

3. Négyzethálós papíron kerítsünk körül különbözőképpen öt egybevágó négyzetet úgy, hogy mindegyiknek legyen legalább egy közös oldala egy másikkal, vagyis a kis négyzetek egyetlen síkidomot alkossanak! Hány különböző síkidomot tudunk így papírra rajzolni, ha kikötjük, hogy nem számít különbözőnek két alakzat ha kivágva az egyik a másikkal valamiképpen lefedhető?

4. Az ábrán látható pontok egy négyzetrács pontjai. Hány különböző négyzetet tudunk rajzolni úgy, hogy a négyzetek csúcspontjai a négyzetrács pontjai legyenek? Mekkora az így keletkezett négyzetek területe, ha területegységnek e négy pont

által meghatározott területet vesszük? (Két négyzetet különbözőnek tekintünk, ha valamelyik csúcspontjuk különböző.)

5. Egy tanuló műanyag lapokból egy 16 cm^2 és egy 36 cm^2 területű négyzetet vágott ki. A két négyzetet azután úgy helyezte egymásra, hogy négyzetben takarták egymást. Az így kelekezett nyolcszögnek a kerülete 20 cm-rel nagyobb volt, mint annak a négyzetnek a kerülete, amelyik az egymásra helyezéskor keletkezett. Állapítsátok meg, az egymásra helyezéskor keletkezett négyzet oldalhosszúságát!

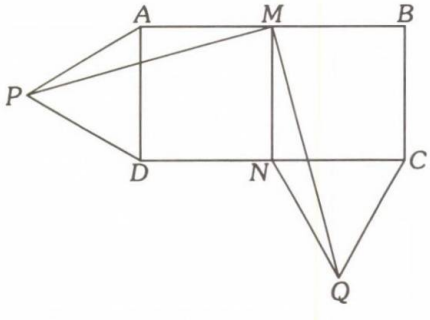
6. osztály

1. A „Hány óra van?" kérdésre valaki így válaszolt: „Az éjfél óta eltelt idő fele éppen annyi, mint a délig hátralévő idő $\frac{3}{4}$ része." Mennyi idő volt a kérdés feltevésekor?

2. Egy testnevelés tagozatos 6. osztályba összesen 42 tanuló jár, mindenki úszik, vagy kosarazik, vagy tornázik. Tudjuk, hogy 20-an úsznak, 19-en tornáznak, 18-an kosaraznak. 7 olyan tanuló van, aki úszik és kosarazik, 8-an úsznak és tornáznak, 6-an tornáznak és kosaraznak. Hányan foglalkoznak mindhárom sportággal?

3. Igazold, hogy bármely 2-nél nagyobb öt prímszám közül kiválaszthatunk kettőt úgy, hogy különbségük osztható legyen 8-cal!

4. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2AD$, M és N pedig az AB ill. DC felezőpontja. Az AD-re és NC-re, mint oldalakra a téglalapokon kívül megszerkesztjük az APD és NQC egyenlő oldalú háromszögeket. Mutassuk meg, hogy az MPQ háromszög derékszögű és egyenlő szárú!



5. Egy négyzet alakú papírlapból egy kereszt alakzatot vágtak ki, amely öt egybevágó négyzetből állt. A hulladékot egyenlő szárú háromszögek alkották, amelyeknek

összterülete 48 cm² volt. Állapítsátok meg az eredeti négyzet területét!

7. osztály

1. Határozzuk meg az $\overline{ab}$ számokat, ha tudjuk, hogy számjegyei négyzetének összege prímszám, számjegyei négyzetének szorzata pedig 100-zal osztható szám!

2. Egy nagy kocka három különböző színű egybevágó kiskockákból volt összerakva: $\frac{13}{72}$ része piros kockából, $\frac{25}{48}$ része kékből állt, és zöld kockából kevesebb mint 1000 kis kocka volt. Hány kis kockából állt a nagy kocka összesen és mennyi volt az egyes színekből?

3. *a)* 2 óra után mikor fedik egymást először az óra mutatói?
b) Mikor zárnak be először 60°-os szöget?

4. A 10 dm² területű $ABCD$ paralelogramma oldalaira $AB = 3$ dm, $BC = 5$ dm teljesül. Vegyük fel az E, F, G pontokat az AB, BC ill. AD oldalakon úgy, hogy $AE = BF = AG = 2$ dm teljesüljön! A G-n átmenő EF-fel párhuzamos egyenes CD-t H pontban metszi. Mekkora az $EFHG$ négyszög területe?

5. Szerkessz háromszöget, ha $a = 7$ cm, $\alpha = 75°$ és $b + c = 9{,}5$ cm!

8. osztály

1. Határozd meg azt az öt egymás után következő legkisebb pozitív egész számot, amelyek összege négyzetszám és egyben köbszám is!

2. Vezessük be a következő jelölést!

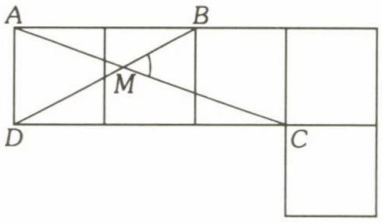
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n.$$

Mutassuk meg, hogy az

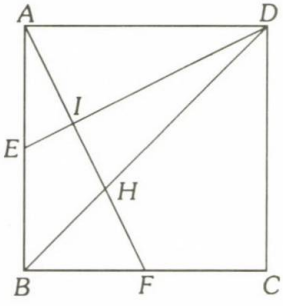
$$A = 16! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16}\right)$$

szám osztható 1989-cel!

3. Hány fokos szöget zár be a négyzetrácsba berajzolt két szakasz?



4. Az $ABCD$ négyzet oldalai 2 cm hosszúságúak, E az AB szakasznak, F a BC szakasznak a felezőpontja, AF és DE egyenesek I-ben, BD és AF egyenesek pedig H-ban metszik egymást. Mekkora a $BEIH$ négyszög területe?



5. Szerkessz háromszöget, ha tudjuk, hogy az egyik oldala 5 cm és a másik két oldalához tartozó magassága 3,3 cm illetve 2 cm!

Róka Sándor

Beszámoló egy levelező pontversenyről

A nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola Matematika Tanszéke már negyedik éve szervez levelező versenyt 10-14 éves gyerekeknek matematikából. Az első évben 30, a másodikban 140, a harmadikban 800 résztvevője volt a versenynek, ebben az évben pedig 500 gyerekkel levelezünk. Az első két évben csak Szabolcs-Szatmár-Bereg megyében szerveztük a versenyt, az utóbbi két évben már minden megyéből van résztvevő.

A levelezés célja a résztvevők problémamegoldó készségét fejleszteni, segíteni a versenyekre való készülést, jobban megkedveltetni velük a matematikát.

Az ilyen típusú tehetséggondozás mellett szóló fontos érv, hogy eldugott, kis falvakban lakó gyerekek számára lehetőséget nyújt matematikai képességeik rendszeres fejlesztésére, amelyre talán egyéb alkalom nem is adódik.

Tudjuk, hogy nehéz a gyerekekkel megtanítani, hogyan írják le megoldásaikat. A levelező verseny jó lehetőséget nyújt ennek rendszeres gyakorlására.

A 8 fordulóból álló versenyben külön indulnak a 4., az 5-6. és a 7-8. osztályosok. (Az első évben 4. osztályosoknak még nem volt verseny.) Minden fordulóban 8 feladatot kell megoldaniuk, a megoldásra kb. 20 napjuk van. A beküldési határidő után egy héttel postára adjuk a kijavított dolgozatokat, a résztvevők által szerzett pontok listáját, a legutolsó forduló megoldásait és az új feladatsort.

A résztvevők száma függ a részvételi díjtól is, ami az első évben 980 Ft, majd 500 Ft, 600 Ft, volt ebben az évben pedig már 1000 Ft. A megyei Pedagógiai Intézet minden évben támogatta a versenyt (10 000 Ft, 30 000 Ft, 40 000 Ft, 10 000 Ft), a második évben a G2000 Alapítvány is segítséget nyújtott (10 000 Ft). Ebben az évben pedig az Országos Játékalap adott támogatást (150 000 Ft). A bevételből kellett fedezni a postai költségeket, a sokszorosítást, a munkabért s egyéb kiadásokat is.

A levelező verseny meghírdetésében sokat segítenek a megyei pedagógiai intézetek. A hivatalos ügyek intézését, a szervezést dr. Varecza Árpád tanszékvezető főiskolai tanár végzi, a feladatsorok és megoldások összeállítását, és a szövegszerkesztéssel járó munkát én végzem, a dolgozatokat feleségem javítja.

A csekély lemorzsolódásból is érezhető, hogy szeretik a gyerekek ezt a versenyt. Az egyik 7. osztályos gyerek írta az első év után: „Tetszett, mert nagyon jó gondolkodtató feladatok voltak. Sokszor az egész család hetekig gondolkodott rajta, a játékos feladatoknál még a tízéves húgom is bekapcsolódott." Vannak olyan gyerekek, akik 3-4 éve résztvevői a versenynek. Zömében gondos, szép munkát kapunk. Érdekes, hogy észrevehetően gyakoribb az igényes dolgozat ebben az évben, mint például tavaly. Van, aki szövegszerkesztővel írja le a megoldásokat. Kapunk tőlük olyan leveleket is, melyben magukról írnak, volt aki fényképet is küldött magáról, karácsonykor és húsvétkor többen küldenek képeslapot. Akadnak olyan gyerekek is, akik megírják, melyik feladatról mi a véleményük, pl.: „...Hát ez a telek se nagyon tetszik nekem. Múltkor sem sikerült meg most sem, nem tudom hogy lehet ezt az 5-öst megoldani. Kíváncsi leszek, hogyan kellett. A 6-os is könnyű volt. Megoldottam. ...". Egy másik levélből: „Az 5. osztályosok számára ki-

írt szorgalmi feladatban van egy szám, mely nem olvasható tisztán... Most mi az igazság? 16 különböző szám kell, vagy lehet 1 ismétlődő is, s ez esetben elég lenne 15 különböző. Már több okos bácsit megkérdeztem, s azt mondták Budapestről éppúgy, mint Csengerből vagy Miskolcról, hogy ha 16 különböző szám kell, akkor ennek a feladatnak nincs megoldása, mivel egy szám feltétlenül ismétlődik." Persze volt megoldása a feladatnak, néhányan megoldották. Szóval leveleznek velünk. Ha elírjuk a pontjaikat, vagy tévesen javítjuk ki a dolgozatukat, akkor postafordultával írnak nekünk, s mi ezt igyekszünk korrigálni. Néha talán vissza is élnek ezzel, a kijavított dolgozatba írnak be megoldást, s kérik, hogy pontszámukat aszerint számítsuk. Ha méltánytalanság történik valakivel, mondjuk valamiért nem küldtünk neki levelet, akkor ezt kompenzáljuk azzal is, hogy megküldjük a tavalyi verseny összes feladatsorát, megoldását, vagy az 1980-1993 évek KMBK megyei döntőinek feladatait stb.

A beküldési határidőt csak egy-két gyerek kési le, de ha megkapjuk a határidőt követő héten, akkor még beszámítjuk a pontjaikat. A késve jövő levelekben van amikor a szülő ír, mentegetőzik, hogy ő felejtette el időben feladni. Van úgy, hogy a tanártól vagy az igazgatótól kapunk kísérő levelet (pl. influenzajárvány miatt zárva volt az iskola). Volt, amikor a határidő előtt pár nappal telefonon kerestek, a gyerek elhagyta a feladatsort, küldjük el gyorsan faxon.

Némelyik iskolában számon tartják, hogy diákjuk milyen eredményt ér el a pontversenyben, s osztályzattal, vagy más módon jutalmazzák az eredményes szereplést.

Ebben az évben először – a magas (?) részvételi díj miatt – vannak csoportos résztvevőink is (tagozatos osztályok).

A gyerekek között – ismerősöktől tudjuk – vannak olyanok, akik önállóan dolgoznak, nem engedik, hogy segítsenek nekik. Előfordul, hogy a szülők, vagy a tanárok segítenek, de ahogy tőlük tudni lehet, némelyik feladat nekik is sokszor fejtörést okoz. Volt úgy, hogy az egyik tanár telefonon keresett, helyesen van-e megfogalmazva a feladat, mert szerinte így nincs megoldás. Ha segítenek egy gyereknek a feladatok megoldásában, az hasznos is lehet.

Minden évben ajánljuk nekik – különösen a 7-8. osztályosoknak – a Középiskolai Matematikai Lapok megismerését, valamint a KMBK versenyen való részvételt.

A résztvevők között van néhány gyerek, aki bejutott a KMBK országos döntőjére, s van olyan is, aki ott dobogós helyezést ért el.

A dolgozatok javítása sok élménnyel együtt jár. Nem az a jó benne, hogy 4 nap alatt kell kijavítani 500 dolgozatot, hanem annak lehet valóban örülni, amikor a mienktől különböző, más, szebb megoldást látunk.

Ízelítőül három feladat a 4. osztályosok ezévi versenyéből.

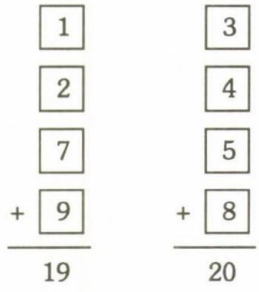
1. feladat: Tudnál-e olyan, a kockától különböző testet készíteni, melynek mindegyik oldallapja négyzet?

Mi itt a térbeli keresztre gondoltunk (egy kocka mindegyik lapjára egy vele egybevágó kockát ragasztunk), ám az egyik gyerek a következőt írta: „Igen, például az alap- és a fedőlap is lehet háromszög, míg az oldallapok négyzetek."

2. feladat: Egy henger alakú ementáli sajtot szét tudsz-e vágni három vágással nyolc részre?

A mi megoldásunk az, hogy függőlegesen két, egymásra merőleges vágás után vízszintesen vágjuk ketté a sajtot. Az egyik versenyző úgy oldotta meg, hogy az első vágás után kapott két rész mindegyikét a következő vágás 2-2 részre vágja, majd ezt a 4 darabot egymásra teszi, és a harmadik vágással mindegyiket két részre osztja. Ez valójában azonos a mi megoldásunkkal, de a megoldó kicsit más szemszögből közelített a megoldáshoz.

3. feladat: Elkészítettük az 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 számkártyákat, és az ábra szerint helyeztük el azokat. Cserélj fel két számkártyát úgy, hogy a két összeg egyenlő legyen !



Az ismert megoldás az, hogy a 8-as és a 9-es kártyát cseréljük fel, és a 9-est megfordítva, 6-osként helyezzük el. Így mindkét oszlopban 18 lesz az összeg. Az egyik megoldó a 3-ast és a 7-est cserélte fel és azokat úgy helyezte el, hogy az egyik oszlopban az $1 + 2 + 93 = 96$, a másikban a $4 + 5 + 87 = 96$ összeget kapta.

A levelezés ebben az évben az Abacus nevet vette fel. Várhatóan 1994 őszén indul az Abacus, matematikai lapok 10-14 éveseknek c. folyóirat, melynek keretében folytatódik a levelező verseny. A lap a tanév során 8 számban, decemberben összevont, kettős számként jelenik meg.

Dr. Csorba Ferenc - Náfrádi Ferenc

Megyei középiskolás matematikaverseny Sopronban

A bolyai János Matematikai Társulat Győri és Soproni Tagozata 1992 őszén egy új, megyei matematika verseny rendezését határozta el. Huszonöt középiskola közel százötven tanulóval jelentkezett a rendezvényünkre, amelyet az Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskolán bonyolítottunk le. Látva az érdeklődést, még ott elhatároztuk hogy megpróbáljuk minden évben, a lehetőségekhez képest a megye más-más városában megrendezni. Az Erdészeti és Faipari Egyetem jóvoltából Sopron vállalta az 1994-es verseny rendezését. A versenyfelhívás 1993 novemberében jelent meg a Győr-Moson-Sopron Megyei Pedagógiai Intézet értesítőjében, a Hírekben. A versenyre 171 tanuló nevezett. (A tavalyihoz hasonlóan idén is minden iskola maximum hat fővel indulhatott.) Gondoltunk a szlovákiai magyar tanítási nyelvű iskolák tanulóira is, nyolc intézményből hívtunk meg versenyzőket.

A versenyre 1994. február 26-án került sor a soproni Erdészeti és Faipari Egyetem Matematikai Intézetében. A megnyitón dr. Winkler András tanszékvezető egyetemi tanár, az EFE rektora köszöntötte a megjelent 154 diákot és kísérőtanáraikat.

A dolgozatok megírására két óra állt rendelkezésre. Más-más feladatsort kaptak a szakközépiskolások és a gimnazisták. Amíg a versenybizottság a dolgozatokat értékelte, addig a tanulók és kísérőik – ebéd után – dr. Horváth Jenő tanszékvezető egyetemi tanár. Néhány feladat szép megoldása című előadását hallgatták. A rendezvény végén az okleveleket és az értékes díjakat dr. Horváth Jenő és Szakál Péter, a BJMT Soproni Tagozatának elnöke adta át.

A kitűzött feladatok

Szakközépiskola I. kategória

1. Ábrázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

$$f(x) = |\,|\,|x-1|-1|-1|,$$

$$g(x) = x + \frac{100}{x}.$$

Jellemezzük a függvényeket az alábbi szempontok szerint:

a) értelmezési tartomány,
b) értékkészlet,
c) tengelymetszetek,
d) szélsőértékek,
e) a függvény menete.

2. Egy trapézt a két átlója mentén négy háromszögre bontottunk. A párhuzmos oldalakon nyugvó háromszögek területe T és t területegység. Fejezzük ki a trapéz területét T és t segítségével!

3. Egy téglalap oldalai 12 illetve 24 cm hosszúak. A téglalapba két egyenlő sugarú k_1 és k_2 kört írunk, amelyek egymást, valamint a téglalap két hosszabb és egy rövidebb oldalát is érintik. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amely kívülről érinti a k_1 és k_2 köröket, s a hosszabbik oldalt belülről!

4. Egy tehergépkocsinak mind a négy kerekére új gumiabroncsot szereltek. Egy abroncsot akkor tekintünk teljesen elkopottnak, ha a hátsó keréken 15 000 km-t futott, vagy ha az első keréken 25 000 km-t. Mennyit futhat a kocsi a négy abroncs teljes elkopásáig, ha alkalmas időben az első abroncspárt felcserélik a hátsó abroncspárral?

5. Adott $2n+1$ darab különböző egész szám, mindegyik abszolút értéke legfeljebb $2n-1$. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő olyan, amelyek összege nulla! Igaz-e, hogy van közöttük három is, amelyek összege nulla?

Szakközépiskola II. kategória

1. 1-től kezdve 1994-ig leírtuk a pozitív egész számokat. Hányszor írtuk le közben az 1-es számjegyet?

2. Melyek azok a valós számok, amelyekre:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \operatorname{tg} x < -1?$$

3. Az $x^2+px+1=0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, az $x^2+qx+1=0$ egyenleté x_3 és x_4. Bizonyítsuk be, hogy

$$(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4) = q^2-p^2!$$

4. Azonos az első kategória 4. feladatával.

5. Kivágtunk két egybevágó négyzetlapot: az egyiket kék, a másikat piros színű papírból. Ezután úgy helyeztük egymásra őket, hogy együttes határvonaluk (konkáv) tizenhatszög legyen. Bizonyítsuk be, hogy e tizenhatszög kék határvonalának hossza egyenlő a piros határvonalának hosszával!

Gimnázium I. kategória

1. Ábrázoljuk az $f(x) = |5-|x+1|+x|$ függvényt!

2. Oldjuk meg:

$$x^2+7 = 4y,$$
$$y^2+14 = 6z,$$
$$z^2-7 = 2x.$$

3. András és Béla sakkoznak. Andrásnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 másodperccel több időre van szüksége ahhoz, hogy saját sakkfiguráit felállítsa a sakktáblára, mint arnennyi időre akkor lenne szükség, ha az összes sakkfigurát közösen raknák fel. Mennyi idő alatt rakja fel ki-ki a saját sakkfiguráit?

4. Adott a síkon az AB szakasz. A szakasz tetszőleges P pontja két részre bontja a szakaszt. Mind a két rész fölé rajzoljunk a szakasz azonos oldalán négyzeteket! Határozzuk meg a két négyzet középpontját összekötő szakasz felezőpontjainak halmazát!

Gimnázium II. kategória

1. Mutassuk meg, hogy bármely háromszög területe kisebb a köré írt kör területének felénél !

2. Mutassuk meg, hogy a tízes számrendszerben felírt

$$A = \underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{22\ldots2225}_{n+1}$$

alakú szám négyzetszám. Határozzuk meg az A négyzetgyökének tízes számrendszerbeli alakját !

3. Az x mely értékeire lesz a

$$K = (1-x)^9(1+x)(1+2x)^4$$

szorzat értéke a legnagyobb, és mekkora a maximális értéke?

4. Egy a oldalú szabályos hatszög és egy a oldalú szabályos háromszög síkjai párhuzamosak. A kilenc csúcs alkalmas csoportosításban további három szabályos háromszöget és három négyzetet határoz meg. Határozzuk meg ezen nyolc lappal határolt konvex test térfogatát!

A verseny helyezettjei

Szakközépiskola I. kategória

1. *Szentkatolnai Gábor*, Deák F. Szakközépiskola, Győr, tanára: Zsebők Ottóné
2. *Zaupper Bence*, Krúdy Gy. Szakközépiskola, Győr, tanára: Babarczi Imréné
3. *Varga Zsolt*, Bolyai J. Szakközépiskola, Mosonmagyaróvár, tanára: Csölley Márta

Különdíj:

Jalsovszky Tamás, Ipari Szakközépiskola, Rév-Komárom, tanára: Oláh György

Szakközépiskola II. kategória

1. *Szűcs Géza*, Jedlik Á. Szakközépiskola, Győr, tanára: Oross Tiborné
2. *Kapronczai János*, Jedlik Á. Szakközépiskola, Győr, tanára: Oross Tiborné
3. *Bitera Krisztián*, Jedlik Á. Szakközépiskola, Győr, tanára: Zábrádiné Schmierer Emília

Különdíj:

Végh László, Ipari Szakközépiskola, Rév-Komárom, tanára: Oláh György

Gimnázium I. kategória

1. *Bartalos Máté*, Révai Miklós Gimnázium, Győr, tanára: Szabó Rudolfné
2. *Pongrátcz Gergely*, Kossuth Lajos Gimnázium, Mosonmagyaróvár, tanára: Enzsölné, Gulyás Ferencné
3. *Pólik Imre*, Bencés Gimnázium, Pannonhalma, tanára: Feith Péterné

Különdíj:

Varga Tamás, Magyar Tannyelvű Gimnázium, Rév-Komárom

Gimnázium II. kategória

1. *Halbritter András*, Czuczor Gergely Bencés Gimnázium, Győr, tanára: Csonka László
2. *Ódor Lajos*, Magyar Tannyelvű Gimnázium, Rév-Komárom, tanára: Lovász Gabriella
3. *Kóródi Gergely*, Bencés Gimnázium, Pannonhalma, tanára: Binczberger Ákos

Különdíj:

Mácza Miklós, Magyar Tannyelvű Gimnázium, Rév-Komárom, tanára: Keszegh István

A NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ RT. megváltoztatta emblémáját, hogy a formai korszerűsítéssel is kifejezze azokat a fontos változásokat, amelyek előnyeit az új tanévben már Ön is tapasztalni fogja:

- Korszerű részvénytársasági formában működünk, ami lehetővé teszi, hogy munkánkba Ön is beleszólhasson.

- Hatékony belső struktúrát alakítottunk ki, ami jobban biztosítja, hogy a tankönyvek időben megjelenjenek és az iskolába kerüljenek.

- Változtattunk módszereinken: a közismert és mindenki által nagyrabecsült szerzőink és partnereink mellé másokat, új irányzatokat meghonosító alkotókat is felkértünk.

Könyvajánlat

Baginé - Bartók - Szebenine - Péter Szabóné - Tormáné

Matematikai gyakorló munkafüzet 1. - 2. - 3. - 4. osztály számára

A kiadvány célja, hogy a kisiskolások minél hamarabb és minél könnyebben megszerezzék matematikai ismereteiket. Olyan munkáltató feladatlap, mely a nevelők, szülők segítségével és önállóan is jól használható. A sok érdekes feladat lehetőséget ad az eddigi tudás felelevenítésére, bővítésére. A munkafüzet végén található felmérő lapok segítségével a tanulók tudásukat mérhetik le, és még játékos fejtörők is várnak az érdeklődőkre. Főleg azoknak nyújt segítséget, akiknek több gyakorlásra van szükségük a tananyag elsajátításához.

Megjelent (2.,3.,4.) ára kötetenként: 198,- Ft

Végh Gyula

SZÓMA

A könyv egy igen érdekes geometriai fejtörő játék leírását, valamint magát a játékot is tartalmazza. A játék egyszerű hét elemből álló változata eléggé közismert, melyet a szerző lépésenként, feladatokkal színesítve 38 eleműre bővít. A játék kibővített változatára nagyon sok meglepő, és „szép" feladatot tartalmaz a könyv, melyben külön fejezetben egy-egy lehetséges megoldást is közöl a kitűzött több mint 120 feladatra.

Ez az érdekes geometriai fejtörő játék közben észrevétlenül fejleszti nem csak a megfigyelő készséget és a kézügyességet, hanem a térbeli szemléletet és a kombinációs készséget is.

Megjelent ára: 698,- Ft

Csepcsányi - Csordás - Koleszár - Nagy (szerk.)

Matematikai versenytesztek

A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai

A népszerű „Zrínyi" matematikaverseny 5 x 6 feladatsorát (1991-1993-as évek megyei és országos fordulóinak feladatai) ezúttal könyvben jelentek meg. A könyv tartalmazza a feladatok megoldási menetét, és az egyes évek évfolyamonkénti tíz legjobb tanulójának eredményeit is. A versenyre az általános iskolák 3 - 8. osztályos tanulói közül bárki jelentkezhet, aki kedveli a kicsit furfangos, gondolkodtató feladatokat, szeretné összemérni tudását a társaival.

Az év végén külön kötetben jelenik meg az 1994. évi megyei és országos döntő feladatai, megoldásai valamint a döntőbe jutott versenyzők adatai.

Megjelent ára: 396,- Ft

imosoft